Lezione n. 8: Serie di Taylor e di Mac Laurin –parte 2–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è … e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p… ffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Firenze, 14/03/2020

Serie di Taylor

Adesso, proviamo a fare alcune nuove considerazioni: Data una funzione f di classe C^{∞} in x_0 possiamo considerare la serie di Taylor di f di centro x_0, cioè:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \qquad (\mathrm{I})$$

Serie di Taylor

Adesso, proviamo a fare alcune nuove considerazioni: Data una funzione f di classe C^∞ in x_0 possiamo considerare la serie di Taylor di f di centro x_0, cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (\mathrm{I})$$

Ci chiediamo:

1. Se $\exists$ un intorno di x_0 nel quale la serie (I) sia convergente
2. Supposto che $\exists$ un tale intorno, se in esso la somma della serie coincide con $f(x)$

Serie di Taylor

Adesso, proviamo a fare alcune nuove considerazioni: Data una funzione f di classe C^{∞} in x_0 possiamo considerare la serie di Taylor di f di centro x_0, cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (\mathrm{I})$$

Ci chiediamo:

1. Se $\exists$ un intorno di x_0 nel quale la serie (I) sia convergente
2. Supposto che $\exists$ un tale intorno, se in esso la somma della serie coincide con $f(x)$

Definizione

Una funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di un punto x_0 (o analitica in x_0) se $\exists$ un intorno di x_0 in cui valga l'uguaglianza:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Serie di Taylor

Adesso, proviamo a fare alcune nuove considerazioni: Data una funzione f di classe C^∞ in x_0 possiamo considerare la serie di Taylor di f di centro x_0, cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (\mathrm{I})$$

Ci chiediamo:

1. Se $\exists$ un intorno di x_0 nel quale la serie (I) sia convergente
2. Supposto che $\exists$ un tale intorno, se in esso la somma della serie coincide con $f(x)$

Definizione

Una funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di un punto x_0 (o analitica in x_0) se $\exists$ un intorno di x_0 in cui valga l'uguaglianza:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Si dice che f è analitica se ogni punto del suo dominio ammette un intorno in cui f è sviluppabile in serie di Taylor (ovvero, se è analitica in ogni punto del suo dominio)

Osservazione

Esistono funzioni di classe C^∞ ma non analitiche. Una di queste è per esempio:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}}$$

le cui derivate successive sono tutte continue e nulle nel punto $x_0 = 0$.

Osservazione

Esistono funzioni di classe C^∞ ma non analitiche. Una di queste è per esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

le cui derivate successive sono tutte continue e nulle nel punto $x_0 = 0$.

Quindi, se fosse analitica, in un intorno del punto $x_0 = 0$ dovrebbe valere l'uguaglianza:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

e ciò è impossibile perché $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, mentre la sua serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha per somma zero (essendo nulli tutti i suoi termini).

Osservazione

Esistono funzioni di classe C^∞ ma non analitiche. Una di queste è per esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

le cui derivate successive sono tutte continue e nulle nel punto $x_0 = 0$.

Quindi, se fosse analitica, in un intorno del punto $x_0 = 0$ dovrebbe valere l'uguaglianza:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

e ciò è impossibile perché $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, mentre la sua serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha per somma zero (essendo nulli tutti i suoi termini).

- Abbiamo la seguente condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor

<u>Osservazione</u>

Esistono funzioni di classe C^∞ ma non analitiche. Una di queste è per esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

le cui derivate successive sono tutte continue e nulle nel punto $x_0 = 0$.

Quindi, se fosse analitica, in un intorno del punto $x_0 = 0$ dovrebbe valere l'uguaglianza:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

e ciò è impossibile perché $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, mentre la sua serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha per somma zero (essendo nulli tutti i suoi termini).

- Abbiamo la seguente condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor

<u>Teorema</u>: Una funzione $f \in C^\infty$ in x_0 è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - R, x_0 + R)$ di x_0 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ risulta: $\lim_{n \to +\infty} R_n(x - x_0) = 0$

dove $R_n(x-x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ denota il resto n-esimo della formula di Taylor di centro x_0 per $f(x)$.

Esempio 1

La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$.

Vediamo questo fatto (qui $x_0 = 0$): sappiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(0, x)$ (I_c)

Esempio 1

La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$.

Vediamo questo fatto (qui $x_0 = 0$): Sappiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(0, x)$ (Ic)

Il resto $R_n(0, x)$, nella forma di Lagrange è, in questo caso: $\boxed{R_n(0,x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}}$

con $c \in (0, x)$

oppure $c \in (x, 0)$

Esempio 1

La funzione $f(x)=e^x$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin e tale serie ha raggio di convergenza $R=+\infty$.

Vediamo questo fatto (qui $x_0=0$): Sappiamo che $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n(0,x)$ (I_c)

Il resto $R_n(0,x)$, nella forma di Lagrange è, in questo caso: $R_n(0,x)=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

con $c\in(0,x)$
oppure $c\in(x,0)$

Allora, fissato $\underline{\underline{x\in\mathbb{R}}}$, si ha che

$$\boxed{0\le |R_n(0,x)|\le A\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \quad (\mathrm{II}) \qquad \text{con } A=\begin{cases} e^x, & x>0 \\ 1, & x\le 0\end{cases}$$

Esempio 1

La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$.

Vediamo questo fatto (qui $x_0 = 0$): Sappiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(0,x)$ (Ic)

Il resto $R_n(0,x)$, nella forma di Lagrange è, in questo caso: $R_n(0,x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

con $c \in (0,x)$

oppure $c \in (x,0)$

(II)

Allora, fissato $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$, si ha che $0 \leq |R_n(0,x)| \leq A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ con $A = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$

- Ricordiamo adesso la formula di Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \to +\infty$

(III) ovvero, più precisamente, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{n!} = 1$

Esempio 1

La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$.

Vediamo questo fatto (qui $x_0 = 0$): Sappiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(0,x)$ (I$_c$)

Il resto $R_n(0,x)$, nella forma di Lagrange è, in questo caso: $R_n(0,x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

con $c \in (0, x)$
oppure $c \in (x, 0)$

Allora, fissato $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$, si ha che (II) $0 \leq |R_n(0,x)| \leq A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ con $A = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$

- Ricordiamo adesso la formula di Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \to +\infty$

(III) ovvero, più precisamente, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}}{n!} = 1$

Relativamente a (II) calcoliamo adesso, per $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}$ usando la formula (III):

Esempio 1

La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$.

Vediamo questo fatto (qui $x_0 = 0$): sappiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(0,x)$ (I)

Il resto $R_n(0,x)$, nella forma di Lagrange è, in questo caso: $R_n(0,x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

con $c \in (0,x)$
oppure $c \in (x,0)$

Allora, fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha che

$$0 \le |R_n(0,x)| \le A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{(II)} \quad \text{con } A = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 1, & x \le 0 \end{cases}$$

• Ricordiamo adesso la formula di Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \to +\infty$

(III) ovvero, più precisamente, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{n!} = 1$

Relativamente a (II) calcoliamo adesso, per $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} A\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ usando la formula (III):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{A|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \exp(-(n+1))\sqrt{2\pi(n+1)}}}$$

Esempio 1

La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di MacLaurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$.

Vediamo questo fatto (qui $x_0 = 0$): Sappiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(0,x)$ (I$_c$)

Il resto $R_n(0,x)$, nella forma di Lagrange è, in questo caso: $R_n(0,x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

con $c \in (0,x)$

oppure $c \in (x,0)$

(II)

Allora, fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha che $0 \le |R_n(0,x)| \le A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ con $A = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 1, & x \le 0 \end{cases}$

- Ricordiamo adesso la formula di Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \to +\infty$

(III) ovvero, più precisamente, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{n!} = 1$

Relativamente a (II) calcoliamo adesso, per $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} A\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ usando la formula (III):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\exp(-(n+1))\sqrt{2\pi(n+1)}} = \boxed{\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{A}{\sqrt{2\pi n+1}}}_{\substack{\to 0 \\ n\to+\infty}} \cdot \underbrace{\frac{|x|^{n+1}e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}_{\substack{\to 0 \\ n\to+\infty}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |R_n(0,x)| = 0}$$

Allora dal teorema 1 segue che e^x è sviluppabile in serie di Mac Laurin ;
quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\boxed{e^x = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$ dove abbiamo usato anche (I2). ■

Allora dal teorema 1 segue che e^x è sviluppabile in serie di Mac Laurin; quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $e^x = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ dove abbiamo usato anche (I2). ■

<u>osservazione</u>

Ponendo $x = 1$ nello sviluppo in serie di Mac Laurin di e^x otteniamo che $e = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Allora dal teorema 1 segue che e^x è sviluppabile in serie di Mac Laurin; quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ dove abbiamo usato anche (I2). ■

Osservazione

Ponendo $x=1$ nello sviluppo in serie di Mac Laurin di e^x otteniamo che $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

- Vediamo adesso un criterio che possiamo utilizzare per decidere se $f \in C^\infty$ può essere scritta in serie di Taylor

Allora dal teorema 1 segue che e^x è sviluppabile in serie di Mac Laurin; quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $e^x = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ dove abbiamo usato anche (I2). ■

<u>osservazione</u>

Ponendo $x=1$ nello sviluppo in serie di Mac Laurin di e^x otteniamo che $e = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

- Vediamo adesso un criterio che possiamo utilizzare per decidere se $f \in C^\infty$ può essere scritta in serie di Taylor

<u>Teorema 2</u>:

Sia $f \in C^\infty(I)$, con I intorno del punto x_0. Allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0, se $\exists$ due numeri $L \geq 0$ e $M \geq 0$ tali che, $\forall x \in I$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha che: $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M L^n$. (IV)

Allora dal teorema 1 segue che e^x è sviluppabile in serie di Mac Laurin;
quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $e^x = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ dove abbiamo usato anche (I2). ■

<u>Osservazione</u>

Ponendo $x=1$ nello sviluppo in serie di Mac Laurin di e^x otteniamo che $e = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

- Vediamo adesso un criterio che possiamo utilizzare per decidere se $f \in C^\infty$ può essere scritta in serie di Taylor

<u>Teorema 2:</u>

Sia $f \in C^\infty(I)$, con I intorno del punto x_0. Allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0, se $\exists$ due numeri $L\geq 0$ e $M \geq 0$ tali che, $\forall x \in I$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha che: $|f^{(n)}(x)| \leq M L^n$. (IV)

<u>Osservazione</u>

La condizione è verificata nel caso in cui $\exists$ $M\geq 0$, tale che $\forall x \in I$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

Esempio 1

Se $f(x) = \sin(x)$. Sappiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\boxed{\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(0,x)}$

Esempio 1

Se $f(x) = \sin(x)$. Sappiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(0,x)$

Allora, se $f(x) = \sin(x)$ si ha che $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esempio 1

Se $f(x) = \sin(x)$. Sappiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(0,x)$

Allora, se $f(x) = \sin(x)$ si ha che $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $f(x) = \sin(x)$ è sviluppabile in serie di MacLaurin:

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

e analogamente:

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

■

Esempio 1

Sia $f(x) = \sin(x)$. Sappiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(0,x)$

Allora, se $f(x) = \sin(x)$ si ha che $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $f(x) = \sin(x)$ è sviluppabile in serie di MacLaurin:

$$\sin(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e analogamente:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \blacksquare$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \ln(1+x)$. Sappiamo già che $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ $\forall x$ con $|x|<1$. Quindi $\forall x: |x|<1$ la serie qui sopra converge uniformemente in $[0,x]$, se $x>0$ (oppure in $[x,0]$, se $x<0$).

Esempio 1

Sia $f(x) = \sin(x)$. Sappiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(0,x)$

Allora, se $f(x) = \sin(x)$ si ha che $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $f(x) = \sin(x)$ è sviluppabile in serie di MacLaurin:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e analogamente:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

■

Esempio 2

Sia $f(x) = \ln(1+x)$. Sappiamo già che $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ $\forall x$ con $|x|<1$. Quindi $\forall x: |x|<1$ la serie qui sopra converge uniformemente in $[0,x]$, se $x>0$ (oppure in $[x,0]$, se $x<0$).

Dalla formula di Integrazione termine a termine segue:

$$\ln(1+x) \underset{\underset{x>0 \text{ per esempio}}{\uparrow}}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \,dt = \underset{\underset{\text{Int. termine e termine}}{\uparrow}}{\quad} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

■

Esempio 1

Sia $f(x) = \sin(x)$. Sappiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(0,x)$

Allora, se $f(x) = \sin(x)$ si ha che $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $f(x) = \sin(x)$ è sviluppabile in serie di MacLaurin:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e analogamente:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

■

Esempio 2

Sia $f(x) = \ln(1+x)$. Sappiamo già che $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ $\forall x$ con $|x|<1$. Quindi $\forall x : |x|<1$ la serie qui sopra converge uniformemente in $[0,x]$, se $x>0$ (oppure in $[x,0]$, se $x<0$).

Dalla formula di Integrazione termine a termine segue:

$$\ln(1+x) \underset{\substack{\uparrow \\ x>0 \text{ per esempio}}}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \, dt =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Int. termine e termine}}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (\text{per } x<0 \text{ è analogo})$$

$$\boxed{\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x|<1.}$$

■