UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

Prova "*in itinere*" per "Matematica Discreta e Logica" – secondo appello

4.3.2020

FILA "E"

Esercizio 1

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge \neg y) \vee (\neg a \wedge \neg y) \vee \neg(b \to c) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee (y \wedge z) \vee \neg(y \to z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Soluzione – La formula φ è una tautologia se e soltanto se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Scriviamo $\neg\varphi$ in forma normale congiuntiva (FNC) e poi applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam all'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$.

$$\neg\varphi = \neg\big((a \wedge \neg y) \vee (\neg a \wedge \neg y) \vee \neg(b \to c) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee (y \wedge z) \vee \neg(y \to z)\big) \equiv$$

$$\equiv (\neg a \vee y) \wedge (a \vee y) \wedge (b \to c) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (y \to z) \equiv$$

$$\equiv (\neg a \vee y) \wedge (a \vee y) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee z)$$

L'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$ è

$$\mathcal{K} := \{\{\neg a, y\}, \{a, y\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg y, \neg z\}, \{\neg y, z\}\}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg b, c\}$, $\{\neg b, \neg c, \neg x\}$, $\{\neg y, \neg z\}$, $\{\neg y, z\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{\neg a, y\}, \{a, y\}) = \{y\}$;

$$\{\{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg y, \neg z\}, \{\neg y, z\}, \{y\}\}.$$

Pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: $\{\neg b, c\}$, $\{\neg b, \neg c, \neg x\}$;

$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, \neg z\}, \{y\}) = \{\neg z\}$;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, z\}, \{y\}) = \{z\}$;

$$\{\{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg z\}, \{z\}\}.$$

Pivot z:

clausole non contenenti né z né $\neg z$: $\{\neg b, c\}$, $\{\neg b, \neg c, \neg x\}$;

$\mathrm{Ris}_z(\{z\}, \{\neg z\}) = [\,]$;

$$\{\{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, [\,]\}.$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, è inutile proseguire con l'algoritmo e possiamo già concludere che $\mathcal{K}$ non è soddisfacibile e quindi φ è una tautologia.

<u>Esercizio 2</u>

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, b, \neg y\}, \{a, y\}, \{a, x, \neg y\}, \{\neg a, x\}, \{\neg b, \neg x, y\}, \{b, x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Soluzione – Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$ scegliendo i pivot nell'ordine imposto dall'esercizio.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg b, \neg x, y\}$, $\{b, x, \neg y\}$, $\{\neg b, \neg x, \neg y\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, b, \neg y\}) = \{\neg b, b, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, x\}) = \{\neg b, x, \neg y\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, y\}, \{\neg a, b, \neg y\}) = \{b, y, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, y\}, \{\neg a, x\}) = \{x, y\}$;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, x, \neg y\}, \{\neg a, b, \neg y\}) = \{b, x, \neg y\}$ (si sopprime perché già esistente) ;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, x, \neg y\}, \{\neg a, x\}) = \{x, \neg y\}$;

$$\{\{\neg b, \neg x, y\}, \{b, x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, x, \neg y\}, \{x, y\}, \{x, \neg y\}\}$$

Poiché la clausola $\{x, \neg y\}$ è contenuta nelle due clausole $\{b, x, \neg y\}$ e $\{\neg b, x, \neg y\}$, queste ultime possono essere soppresse. Siamo così ricondotti a considerare il seguente insieme di clausole:

$$\{\{\neg b, \neg x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{x, y\}, \{x, \neg y\}\}$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{x, y\}$, $\{x, \neg y\}$;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{x, y\}, \{x, \neg y\}\}$$

Pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: non ce ne sono ;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{ \}$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ è soddisfacibile. Una valutazione di verità v_0 che soddisfa $\mathcal{K}$ si può ricavare definendola "a ritroso" su y, x, b, a come segue:

$$v_0(y) := 0 \, ; \qquad v_0(x) := 1 \, ; \qquad v_0(b) := 0 \, ; \qquad v_0(a) := 1 \, .$$

Esercizio 3

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive 214 e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive 267 (cioè: $a := 214_{sette}$, $b := 267_{nove}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *tredici*.

Soluzione – Si ha

$$a = 2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 4 = 2 \cdot 49 + 1 \cdot 7 + 4 =$$
$$= 98 + 7 + 4 = 109$$

e

$$b = 2 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + 7 = 2 \cdot 81 + 6 \cdot 9 + 7 =$$
$$= 162 + 54 + 7 = 223 \, .$$

Calcoliamo il massimo comun divisore fra 109 e 223 utilizzando l'algoritmo di Euclide:

$223 = 109 \cdot 2 + 5 \, ;$
$109 = 5 \cdot 21 + 4 \, ;$
$5 = 4 \cdot 1 + 1 \, ;$
$4 = 1 \cdot 4 + 0 \, .$

Dunque

$$\mathrm{MCD}(109, 223) = 1$$

e

$$m = \mathit{mcm}(109, 223) = 109 \cdot 223 = 24\,307 \, .$$

Scriviamo infine m in base *tredici* eseguendo successive divisioni per 13 :

$24\,307 = 13 \cdot 1\,869 + 10 \, ;$
$1\,869 = 13 \cdot 143 + 10 \, ;$
$143 = 13 \cdot 11 + 0 \, ;$
$11 = 13 \cdot 0 + 11 \, .$

Pertanto

$$m = \mathrm{B0AA}_{tredici} \, .$$

Esercizio 4

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x\mathrm{R}y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è pari e y è dispari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme **A** $:= \{9,\ 19,\ 38,\ 52,\ 69\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri pari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Soluzione $-$ (i) Siano $x, y \in \mathbb{N}$. Se x, y sono entrambi pari, sono confrontabili perché $\leq$ è una relazione di ordine totale (come già precisato nel testo dell'esercizio). Lo stesso accade se x, y sono entrambi dispari. Se uno di essi è pari e l'altro è dispari, quello pari precede l'altro per definizione di R. Dunque R è una relazione di ordine totale.

(ii) per la (i), gli elementi di **A** si possono confrontare a due a due, e si ha che

$$38 \mathrel{\mathrm{R}} 52, \qquad 52 \mathrel{\mathrm{R}} 9, \qquad 9 \mathrel{\mathrm{R}} 19, \qquad 19 \mathrel{\mathrm{R}} 69$$

cosicché 38 è il minimo di **A** (e quindi anche l'estremo inferiore di **A**).

(iii) l'insieme dei numeri pari non ha massimo (se x è un numero pari, anche $x+2$ è pari; si ha che $x \leq x+2$ e quindi $x \mathrel{\mathrm{R}} x+2$ per come è definita R) ma è superiormente limitato da ogni numero dispari. Il suo estremo superiore è dunque il minimo dell'insieme dei numeri dispari, cioè 1.

Esercizio 5

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$13\,081\, x = 13\,589\, y\,.$$

Soluzione $-$ L'equazione proposta si può scrivere

$$13\,081\, x - 13\,589\, y = 0$$

e dunque ha certamente soluzione (basta prendere $x = y = 0$). La generica soluzione si ottiene dalla generica soluzione dell'equazione

(*) $$13\,081\, x + 13\,589\, y = 0$$

cambiando segno al valore della y; a sua volta, la generica soluzione della (*) è della forma

$$x := \tfrac{13\,589}{\delta} h, \qquad y := -\tfrac{13\,081}{\delta} h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

dove δ è il massimo comun divisore fra $13\,081$ e $13\,589$.

Resta dunque soltanto da calcolare tale massimo comun divisore. Si ha

$$13\,589 = 13\,081 \cdot 1 + 508\,;$$
$$13\,081 = 508 \cdot 25 + 381\,;$$
$$508 = 381 \cdot 1 + 127\,;$$
$$381 = 127 \cdot 3 + 0\,.$$

Pertanto $\delta = 127$ e la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := 107h, \qquad\qquad y := 103h\,.$$

Esercizio 6

Sia $\mathbb{Z}_{8\,325}$ l'anello delle classi di resto modulo $8\,325$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{8\,325}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{8\,325}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[14]^x = [1]\,; \qquad\qquad [15]^x = [1]\,.$$

Soluzione – Ciascuna delle equazioni proposte se ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ ne ha infinite (data una soluzione x_0 in $\mathbb{Z}^+$, ogni multiplo di x_0 è soluzione).

Per il teorema di Euler-Fermat, l'equazione $[14]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 14 e 8 325 è uguale a 1.

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 14 e $8\,325$:

$$8\,325 = 14 \cdot 594 + 9\,; \qquad 14 = 9 \cdot 1 + 5\,;$$
$$9 = 5 \cdot 1 + 4\,; \qquad 5 = 4 \cdot 1 + 1\,;$$
$$4 = 1 \cdot 4 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra 14 e $8\,325$ è dunque 1; pertanto l'equazione $[14]^x = [1]$ ha (infinite) soluzioni in $\mathbb{Z}^+$, una delle quali è $\varphi(8\,325)$.

Per calcolare $\varphi(8\,325)$ ci serve la fattorizzazione di $8\,325$.

È facile vedere che $8\,325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 37$ con 37 numero primo (infatti si verifica subito che non è divisibile né per 2 né per 3 né per 5). Dunque

$$\varphi(8\,325) = \varphi(3^2) \cdot \varphi(5^2) \cdot \varphi(37) = 6 \cdot 20 \cdot 36 = 4\,320$$

è una soluzione dell'equazione $[14]^x = [1]$.

Poiché, come si è già osservato, anche ogni multiplo di $4\,320$ è soluzione, moltiplicando $4\,320$ per $1\,000$ si ottiene la soluzione $4\,320\,000$ che è maggiore di $100\,000$, come si voleva.

Analogamente, l'equazione $[15]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 15 e $8\,325$ è uguale a 1; ma ciò è impossibile, perché 15 e $8\,325$ sono entrambi multipli di 5. Pertanto l'equazione $[15]^x = [1]$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$.

Esercizio 7

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali pari che in base *dieci* si scrivono con *sette* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

Soluzione — Poiché le sette cifre devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine crescente, fra esse non può comparire lo zero.

Vediamo in quanti modi si può costruire un numero naturale n che rispetti le condizioni del problema. Poiché n deve essere pari, l'ultima cifra a destra può essere soltanto $2, 4, 6$ oppure 8 (abbiamo escluso lo zero). Sono quattro casi che si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità: quindi possiamo considerarli separatamente ed applicare poi il principio di addizione.

Se l'ultima cifra è 2, le prime sei possono essere scelte soltanto fra 1 e 2; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{2+6-1}{6} = \binom{7}{6} = 7$ possibilità.

Se l'ultima cifra è 4, le prime sei possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3$ e 4; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ possibilità.

Se l'ultima cifra è 6, le prime sei possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5$ e 6; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{6+6-1}{6} = \binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 462$ possibilità.

Se l'ultima cifra è 8, le prime sei possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{8+6-1}{6} = \binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1\,287$ possibilità.

Applicando infine il principio di addizione, si trova che i numeri che soddisfano le condizioni poste dal problema sono in tutto

$$7 + 84 + 462 + 1\,287 = 1\,840\,.$$