Lezione n. 9: Proprietà di $\mathbb{R}^n$ –parte 1–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è ... e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p... ffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni
non sarà sempre omogenea, in dipendenza
dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Firenze, 14/03/2020

Proprietà dello spazio $\mathbb{R}^n$

Di seguito vedremo vari concetti legati a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ concentrandoci però, sia per gli esempi che per molte questioni teoriche, sul caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

Proprietà dello spazio $\mathbb{R}^n$

Di seguito vedremo vari concetti legati a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ concentrandoci però, sia per gli esempi che per molte questioni teoriche, sul caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

- Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono punti o vettori. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$ allora $P = (x, y)$ dove x si dice prima coordinata (o componente) e y si dice seconda coordinata.

Proprietà dello spazio $\mathbb{R}^n$

Di seguito vedremo vari concetti legati a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n\}$ concentrandoci però, sia per gli esempi che per molte questioni teoriche, sul caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

- Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono punti o vettori. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$ allora $P = (x, y)$ dove x si dice prima coordinata (o componente) e y si dice seconda coordinata. Analogamente, $P \in \mathbb{R}^n$ è tale che $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e in questo caso i numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le coordinate di P (la prima, la seconda, …, la n-esima).

Proprietà dello spazio $\mathbb{R}^n$

Di seguito vedremo vari concetti legati a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ concentrandoci però, sia per gli esempi che per molte questioni teoriche, sul caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

- Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono punti o vettori. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$ allora $P = (x, y)$ dove x si dice prima coordinata (o componente) e y si dice seconda coordinata. Analogamente, $P \in \mathbb{R}^n$ è tale che $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e in questo caso i numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le coordinate di P (la prima, la seconda, ..., la n-esima).

- Su $\mathbb{R}^n$, per i suoi elementi, sono definite due operazioni, ovvero la somma di vettori e il prodotto per uno scalare.

Dati $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow P = (x, y)$, $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ e la loro somma è definita componente per componente: $P + Q = (x + \bar{x}, y + \bar{y})$.

Proprietà dello spazio $\mathbb{R}^n$

Di seguito vedremo vari concetti legati a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n\}$ concentrandoci però, sia per gli esempi che per molte questioni teoriche, sul caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

- Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono punti o vettori. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$ allora $P = (x, y)$ dove x si dice prima coordinata (o componente) e y si dice seconda coordinata. Analogamente, $P \in \mathbb{R}^n$ è tale che $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e in questo caso i numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le coordinate di P (la prima, la seconda, ..., la n-esima).

- Su $\mathbb{R}^n$, per i suoi elementi, sono definite due operazioni, ovvero la somma di vettori e il prodotto per uno scalare.

  Dati $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow P = (x, y)$, $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ e la loro somma è definita componente per componente: $P + Q = (x + \bar{x}, y + \bar{y})$.

  Dati $P \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (detto scalare) $\Rightarrow$ si definisca λP come il nuovo vettore ottenuto moltiplicando tutte le componenti di $P = (x, y)$ per λ, ovvero: $\lambda P = (\lambda x, \lambda y)$.

Proprietà dello spazio $\mathbb{R}^n$

Di seguito vedremo vari concetti legati a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ concentrandoci però, sia per gli esempi che per molte questioni teoriche, sul caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

- Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono punti o vettori. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$ allora $P = (x, y)$ dove x si dice prima coordinata (o componente) e y si dice seconda coordinata. Analogamente, $P \in \mathbb{R}^n$ è tale che $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e in questo caso i numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le coordinate di P (la prima, la seconda, ..., la n-esima).

- Su $\mathbb{R}^n$, per i suoi elementi, sono definite due operazioni, ovvero la somma di vettori e il prodotto per uno scalare.

  Dati $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow P = (x, y)$, $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ e la loro somma è definita componente per componente: $P + Q = (x + \bar{x}, y + \bar{y})$.

  Dati $P \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (detto scalare) $\Rightarrow$ si definisce λP come il nuovo vettore ottenuto moltiplicando tutte le componenti di $P = (x, y)$ per λ, ovvero: $\lambda P = (\lambda x, \lambda y)$.

- Se $P \in \mathbb{R}^2$ allora la sua "norma" (o modulo) è il numero: $\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (dove $P = (x, y)$)

Proprietà dello spazio $\mathbb{R}^n$

Di seguito vedremo vari concetti legati a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ concentrandoci però, sia per gli esempi che per molte questioni teoriche, sul caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

- Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono punti o vettori. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$ allora $P = (x, y)$ dove x si dice prima coordinata (o componente) e y si dice seconda coordinata. Analogamente, $P \in \mathbb{R}^n$ è tale che $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e in questo caso i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le coordinate di P (la prima, la seconda, ..., la n-esima).

- Su $\mathbb{R}^n$, per i suoi elementi, sono definite due operazioni, ovvero la somma di vettori e il prodotto per uno scalare.

  Dati $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow P = (x, y)$, $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ e la loro somma è definita componente per componente: $P + Q = (x + \bar{x}, y + \bar{y})$.

  Dati $P \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (detto scalare) $\Rightarrow$ si definisce λP come il nuovo vettore ottenuto moltiplicando tutte le componenti di $P = (x, y)$ per λ, ovvero: $\lambda P = (\lambda x, \lambda y)$.

- Se $P \in \mathbb{R}^2$ allora la sua "norma" (o modulo) è il numero: $\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (dove $P = (x, y)$)

  Più in generale, per $P = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

- La norma di un vettore verifica le seguenti proprietà (di seguito $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$\|P\| \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^n \quad (\|P\| = 0 \iff P = 0)$$

$$\|\lambda P\| = |\lambda| \, \|P\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{omogeneità})$$

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\| \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

- La norma di un vettore verifica le seguenti proprietà (di seguito $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

  $\|P\| \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^n \quad (\|P\| = 0 \iff P = 0)$

  $\|\lambda P\| = |\lambda| \, \|P\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$ (omogeneità)

  $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\| \quad$ (disuguaglianza triangolare)

- La distanza fra due punti P, Q di $\mathbb{R}^n$ è per definizione la quantità:

$$\boxed{d(P, Q) := \|P - Q\|}$$

- La norma di un vettore verifica le seguenti proprietà (di seguito $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$\|P\| \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^n \quad (\|P\| = 0 \iff P = 0)$

$\|\lambda P\| = |\lambda| \, \|P\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (omogeneità)

$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$ (disuguaglianza triangolare)

- La distanza fra due punti P, Q di $\mathbb{R}^n$ è per definizione la quantità:

$$d(P, Q) := \|P - Q\|$$

In particolare, se $P = (x, y)$ e $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ sono due punti di $\mathbb{R}^2$, si ha che:

$$\boxed{d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}}$$

- La norma di un vettore verifica le seguenti proprietà (di seguito $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$\|P\| \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^n \quad (\|P\| = 0 \iff P = 0)$

$\|\lambda P\| = |\lambda| \, \|P\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$ (omogeneità)

$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\| \quad$ (disuguaglianza triangolare)

- La distanza fra due punti P, Q di $\mathbb{R}^n$ è per definizione la quantità:

$$d(P, Q) := \|P - Q\|$$

In particolare, se $P = (x, y)$ e $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ sono due punti di $\mathbb{R}^2$, si ha che:

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}$$

e si hanno quindi le proprietà:

$d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$

$d(P, Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad (d(P, Q) = 0 \iff P = Q)$

$d(P, Q) \leq d(P, L) + d(L, Q) \quad \forall L, P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad$ (disuguaglianza triangolare)

- La norma di un vettore verifica le seguenti proprietà (di seguito $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$\|P\| \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^n \quad (\|P\| = 0 \Leftrightarrow P = 0)$$

$$\|\lambda P\| = |\lambda| \, \|P\| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{omogeneità})$$

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\| \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

- La distanza tra due punti P, Q di $\mathbb{R}^n$ è per definizione la quantità:

$$d(P,Q) := \|P - Q\|$$

In particolare, se $P = (x,y)$ e $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ sono due punti di $\mathbb{R}^2$, si ha che:

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2}$$

e si hanno quindi le proprietà:

$$d(P,Q) = d(Q,P) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$$

$$d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad (d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q)$$

$$d(P,Q) \leq d(P,L) + d(L,Q) \quad \forall L, P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

cambio notazione per i vettori

- Nello spazio $\mathbb{R}^n$ si definisce il prodotto scalare tra due vettori $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ come $\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

Ovvero $\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$ $\left(\text{se } \underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} = \|u\|^2 \right)$

Ovvero $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ (se $\underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} = \|u\|^2$)

Il prodotto scalare tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ può essere riscritto equivalentemente (utilizzando un punto di vista più geometrico) come:

$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\theta)}$ dove θ è l'angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$

Ovvero $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ $\quad$ (se $\underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} = \|\underline{u}\|^2$)

Il prodotto scalare tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ può essere riscritto equivalentemente (utilizzando un punto di vista più geometrico) come:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\theta) \quad \text{dove } \theta \text{ è l'angolo compreso tra } \underline{u} \text{ e } \underline{v}$$

- Osserviamo poi che dati $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ elementi di $\mathbb{R}^n$, vale che

$$\boxed{|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq \|\underline{u}\| \|\underline{v}\|} \quad \text{Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz}$$

Tale disuguaglianza permette di definire $\cos(\theta) = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}$, $\underline{u} \neq 0$, $\underline{v} \neq 0$ (se $\underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \cos\theta = 1$)

Ovvero $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ (se $\underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} = \|\underline{u}\|^2$)

Il prodotto scalare tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ può essere riscritto equivalentemente (utilizzando un punto di vista più geometrico) come:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\theta)$$ dove θ è l'angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$

- Osserviamo poi che dati $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ elementi di $\mathbb{R}^n$, vale che

$$|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq \|\underline{u}\| \|\underline{v}\|$$ Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Tale disuguaglianza permette di definire $\boxed{\cos(\theta) = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}, \quad \underline{u} \neq 0, \ \underline{v} \neq 0}$ (se $\underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \cos\theta = 1$)

Ovvero $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ (se $\underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} = \|u\|^2$)

Il prodotto scalare tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ può essere riscritto equivalentemente (utilizzando un punto di vista più geometrico) come:

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos(\theta)$ dove θ è l'angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$

- Osserviamo poi che dati $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ elementi di $\mathbb{R}^n$, vale che

$|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq \|\underline{u}\| \|\underline{v}\|$ Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Tale disuguaglianza permette di definire $\cos(\theta) = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}$, $\underline{u} \neq 0$, $\underline{v} \neq 0$ (se $\underline{u} = \underline{v} \Rightarrow \cos\theta = 1$)

- Dato un punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e dato $r > 0$, chiamiamo intorno sferico di centro P_0 e raggio $r > 0$ l'insieme:

$\boxed{B_r(P_0) = \{ P \in \mathbb{R}^n : \|P - P_0\| < r \}}$ ovvero l'insieme dei punti in $\mathbb{R}^n$ che distano da P_0 meno di $r > 0$

In $\mathbb{R}^2$, l'intorno sferico di un punto $\underline{P}_0$ si dice anche intorno circolare, ed è costituito da un cerchio "pieno", privato della circonferenza (la frontiera del cerchio).

In $\mathbb{R}^2$, l'intorno sferico di un punto $\underline{P_0}$ si dice anche intorno circolare, ed è costituito da un cerchio "pieno", privato della circonferenza (la frontiera del cerchio).

In $\mathbb{R}^3$, l'intorno sferico $B_r(P_0)$ è una palla di centro P_0 e raggio $r>0$, privata della superficie sferica

In $\mathbb{R}^2$, l'intorno sferico di un punto P_0 si dice anche intorno circolare, ed è costituito da un cerchio "pieno", privato della circonferenza (la frontiera del cerchio).

In $\mathbb{R}^3$, l'intorno sferico $B_r(P_0)$ è una palla di centro P_0 e raggio $r>0$, privata della superficie sferica.

- Spesso nel seguito parleremo solo di intorni (riferendoci a intorni sferici). Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, un punto $P_0 \in A$ si dice "<u>interno</u>" ad A se $\exists$ un intorno $B_r(P_0)$ del punto P_0 tale che $B_r(P_0) \subseteq A$.

In $\mathbb{R}^2$, l'intorno sferico di un punto P_0 si dice anche intorno circolare, ed è costituito da un cerchio "pieno", privato della circonferenza (la frontiera del cerchio).

In $\mathbb{R}^3$, l'intorno sferico $B_r(P_0)$ è una palla di centro P_0 e raggio $r>0$, privata della superficie sferica

- Spesso nel seguito parleremo solo di intorni (riferendoci a intorni sferici). Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, un punto $P_0 \in A$ si dice "<u>interno</u>" ad A se $\exists$ un intorno $B_r(P_0)$ del punto P_0 tale che $B_r(P_0) \subseteq A$.

<u>Definizione</u> (con le stesse notazioni appena introdotte) se tutti i punti di A sono interni allora l'insieme A si dice "aperto".

In $\mathbb{R}^2$, l'intorno sferico di un punto P_0 si dice anche intorno circolare, ed è costituito da un cerchio "pieno", privato della circonferenza (la frontiera del cerchio).

In $\mathbb{R}^3$, l'intorno sferico $B_r(P_0)$ è una palla di centro P_0 e raggio $r>0$, privata della superficie sferica

- Spesso nel seguito parleremo solo di intorni (riferendoci a intorni sferici). Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, un punto $P_0 \in A$ si dice "<u>interno</u>" ad A se $\exists$ un intorno $B_r(P_0)$ del punto P_0 tale che $B_r(P_0) \subseteq A$.

<u>Definizione</u> (Con le stesse notazioni appena introdotte) se tutti i punti di A sono interni allora l'insieme A si dice "aperto".

<u>Esempi</u>

1. $\mathbb{R}^2$ è chiaramente un aperto;

In $\mathbb{R}^2$, l'intorno sferico di un punto P_0 si dice anche intorno circolare, ed è costituito da un cerchio "pieno", privato della circonferenza (la frontiera del cerchio).

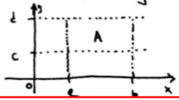
In $\mathbb{R}^3$, l'intorno sferico $B_r(P_0)$ è una palla di centro P_0 e raggio $r>0$, privata della superficie sferica.

- Spesso nel seguito parleremo solo di intorni (riferendoci a intorni sferici). Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, un punto $P_0 \in A$ si dice "<u>interno</u>" ad A se $\exists$ un intorno $B_r(P_0)$ del punto P_0 tale che $B_r(P_0) \subseteq A$.

<u>Definizione</u> (con le stesse notazioni appena introdotte) se tutti i punti di A sono interni allora l'insieme A si dice "aperto".

<u>Esempi</u>

1. $\mathbb{R}^2$ è chiaramente un aperto;
2. L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d\}$ è un insieme aperto, chiamato rettangolo aperto



I bordi tratteggiati del rettangolo A stanno ad indicare il fatto che i lati esterni che racchiudono A stesso, non sono presenti

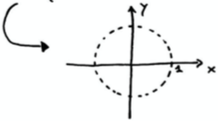
3. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$ è un insieme aperto $(a, b \neq 0)$

3. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$ è un insieme aperto $(a, b \neq 0)$

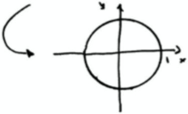
4. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$ è un insieme aperto

3. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$ è un insieme aperto $(a, b \neq 0)$

4. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$ è un insieme aperto



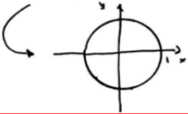
5. L'insieme $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ non è un insieme aperto



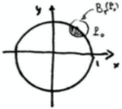
3. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$ è un insieme aperto $(a, b \neq 0)$

4. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$ è un insieme aperto

6. L'insieme $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ non è un insieme aperto

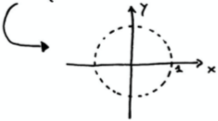


poiché

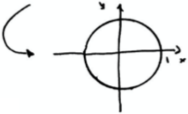


3. L'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$ è un insieme aperto $(a,b\neq 0)$

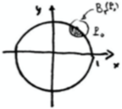
4. L'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$ è un insieme aperto



6. L'insieme $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$ non è un insieme aperto



poiché

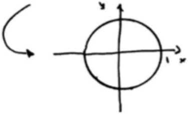


P_0 non è interno a B poiché in ogni suo intorno circolare $B_r(P_0)$ troviamo sia punti di B che punti del complementare di B, B^c.

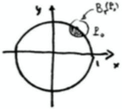
3\. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$ è un insieme aperto $(a, b \neq 0)$

4\. L'insieme $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$ è un insieme aperto

6\. L'insieme $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ non è un insieme aperto



poiché

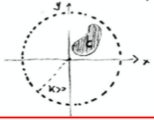


P_0 non è interno a B poiché in ogni suo intorno circolare $B_r(P_0)$ troviamo sia punti di B che punti del complementare di B, B^c.

Definizione

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice "limitato" se $\exists\, K > 0$ tale che $d(P, O) < K$ $\forall\, P \in C$.

In altre parole C è contenuto in un cerchio di centro $O = (0,0)$ e raggio $K > 0$:



Definizione (Punto di accumulazione)

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno forato di A ($B_r(P_0) \setminus \{P_0\}$, $r>0$) contiene punti di A.

Definizione (Punto di accumulazione)

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno forato di A $(B_r(P_0) \setminus \{P_0\},\ r>0)$ contiene punti di A.

In formule: P_0 è di accumulazione per A se $\forall r>0$ si ha che $A \cap \left(B_r(P_0)\setminus\{P_0\}\right) \neq \emptyset$.

Definizione (Punto di accumulazione)

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno forato di A ($B_r(P_0) \setminus \{P_0\}$, $r>0$) contiene punti di A.

Im formule: P_0 è di accumulazione per A se $\forall r>0$ si ha che $A \cap (B_r(P_0) \setminus \{P_0\}) \neq \emptyset$.

In maniera equivalente si può dire che P_0 è di accumulazione per A se ogni suo intorno contiene infiniti punti di A.

Definizione (Punto di accumulazione)

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno forato di A $(B_r(P_0) \setminus \{P_0\},\ r>0)$ contiene punti di A.

In formule: P_0 è di accumulazione per A se $\forall r>0$ si ha che $A \cap (B_r(P_0) \setminus \{P_0\}) \neq \emptyset$.

In maniera equivalente si può dire che P_0 è di accumulazione per A se ogni suo intorno contiene infiniti punti di A.

<u>Osservazione</u>

- Un punto di accumulazione di A non appartiene necessariamente ad A
- Un punto interno ad A è anche un punto di accumulazione di A

Definizione (Punto di accumulazione)

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno forato di A ($B_r(P_0) \setminus \{P_0\}$, $r>0$) contiene punti di A.

In formule: P_0 è di accumulazione per A se $\forall r>0$ si ha che $A \cap (B_r(P_0)\setminus\{P_0\}) \neq \emptyset$.

In maniera equivalente si può dire che P_0 è di accumulazione per A se ogni suo intorno contiene infiniti punti di A.

<u>Osservazione</u>

- Un punto di accumulazione di A non appartiene necessariamente ad A
- Un punto interno ad A è anche un punto di accumulazione di A

<u>Esempio</u>

Il punto $(0,0)$ è di accumulazione per l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

Definizione (Punto di accumulazione)

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che P_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno forato di A ($B_r(P_0) \setminus \{P_0\}$, $r>0$) contiene punti di A.

In formule: P_0 è di accumulazione per A se $\forall r>0$ si ha che $A \cap \left(B_r(P_0)\setminus\{P_0\}\right) \neq \emptyset$.

In maniera equivalente si può dire che P_0 è di accumulazione per A se ogni suo intorno contiene infiniti punti di A.

Osservazione

- Un punto di accumulazione di A non appartiene necessariamente ad A
- Un punto interno ad A è anche un punto di accumulazione di A

Esempio

Il punto $(0,0)$ è di accumulazione per l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

Infatti, $\forall r>0$, i punti del tipo (x,x) con $0<|x|<r/\sqrt{2}$ appartengono a $B_r((0,0)) \cap A$

Inoltre in questo caso $(0,0) \notin A$.

allora la norma $\| (x, x) \| < r$