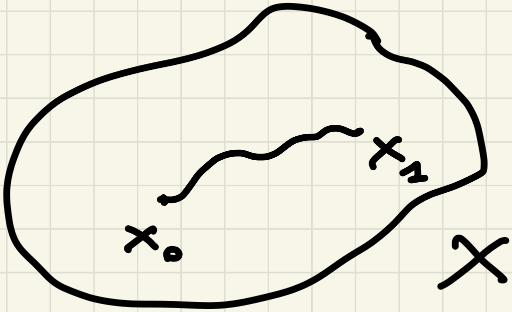
Gruppo fondamentale o primo gruppo di omotopia

<u>Def</u> Sia X uno sp. topologico. Un <u>CAMMINO</u> in X da x_0 a x_1 è una mappa <u>continua</u>

$$\alpha : I = [0,1] \longrightarrow X \quad \text{t.c.}$$

$$\alpha(0) = x_0 \quad e \quad \alpha(1) = x_1$$



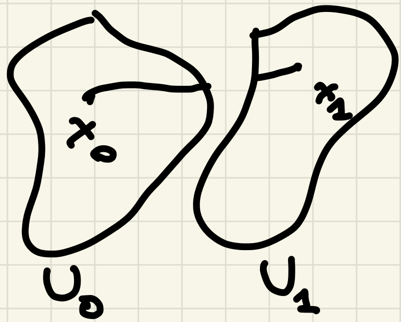
NOTA: un cammino è una applicazione, è una <u>curva parametrizzata</u> NON l'insieme dei punti immagine.

<u>Def</u> X si dice CONNESSO PER ARCHI se, per ogni $x_0, x_1 \in X$ esiste un cammino che congiunge x_0 e x_1.

<u>Teorema</u>: Connesso per archi implica connesso

$X = U_0 \cup U_1$

<u>Dim</u>



$$I = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ 0}}{\alpha^{-1}(U_0)} \cup \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ 1}}{\alpha^{-1}(U_1)}$$

$\cap$ $= \emptyset$ aperti

$U_0 \cap U_1 = \emptyset$

ma I è connesso.

<u>contraddizione</u>

Viceversa falso.

controesempio

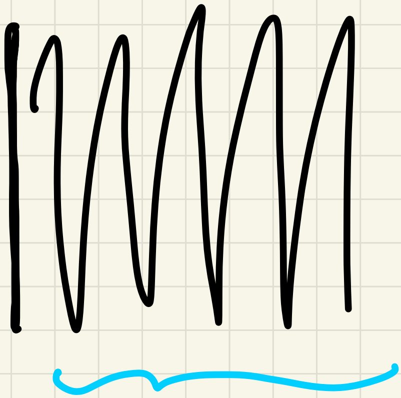


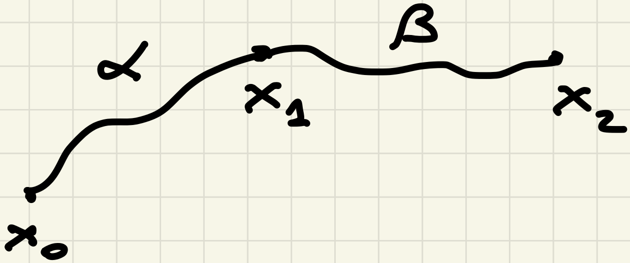
grafico di $\sin \frac{1}{x}$

connesso ma non

connesso per archi

Def Sia α un cammino da x_0 a x_1 e β un cammino da x_1 a x_2. Il prodotto di α e β è il cammino da x_0 a x_2 definito da

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

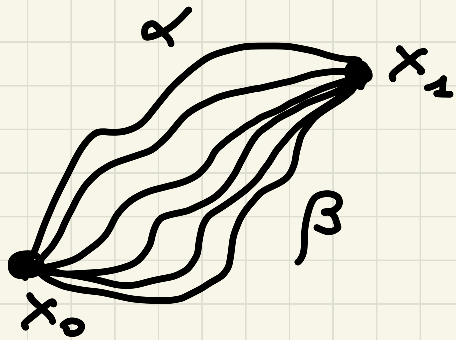


$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ inverso

<u>Def</u> due cammini α e β da x_0 a x_1 sono OMOTOPI se come applicazioni sono omotopi:

$$\exists \quad F : I \times I \longrightarrow X \quad \text{continua}$$
$$(s,t) \longmapsto F(s,t)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(0,t) = x_0 & \\ F(1,t) = x_1 & \forall t \end{array}}$$



$$F(s,0) = \alpha(s)$$

$$F(s,1) = \beta(s)$$

richiesta aggiuntiva

omotopia tra cammini è una relazione di equivalenza.

denotiamo $\boxed{\alpha \sim \beta}$

Teorema ① Se $\alpha_0 \sim \alpha_1$, $\beta_0 \sim \beta_1$ e $\alpha_0\beta_0$ definito, allora

$$\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$$

Teorema ② Se $\alpha_0 \sim \alpha_1$ allora

$$\alpha_0^{-1} \sim \alpha_1^{-1}$$

$\langle \alpha \rangle$ classe di equiv. di α

① $\Rightarrow$ possiamo definire

$$\langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle \overset{\text{def.}}{=} \langle \alpha\beta \rangle \quad (\text{se } \alpha\beta \text{ è definito})$$

② $\Rightarrow$ possiamo definire

$$\langle \alpha \rangle^{-1} = \langle \alpha^{-1} \rangle$$

Gruppo

Un gruppo è un insieme G dotato di una operazione di composizione con le seguenti proprietà:

① $\exists\ e \in G$ t.c.

$$ge = eg = g \quad \forall\, g \in G$$

② $\forall\, g \in G\ \exists\ g^{-1} \in G$ t.c.

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$$

③ vale la proprietà associativa

Teorema $\forall\, x \in X$ sia

$$e_x : I \longrightarrow X$$
$$t \longmapsto x$$

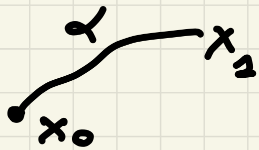
cammino costante

allora

1. se α ha origine in x_0

$$\langle e_{x_0} \rangle \langle \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$$

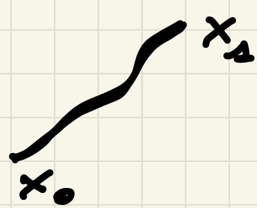
2. se α finisce in x_1



$$\langle \alpha \rangle \langle e_{x_1} \rangle = \langle \alpha \rangle$$

3. se α va da x_0 a x_1 allora

$$\langle \alpha \rangle \langle \alpha^{-1} \rangle = \langle e_{x_0} \rangle$$



$$\langle \alpha^{-1} \rangle \langle \alpha \rangle = \langle e_{x_1} \rangle$$

4. inoltre prodotto associativo

il <u>gruppo fondamentale</u> o

<u>primo gruppo di omotopia</u>

di uno sp. top. X con

punto base x_0 $\pi_1(X, x_0)$

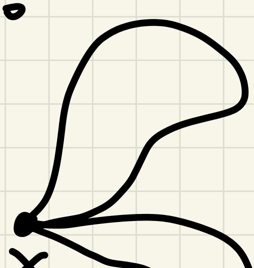
è l'insieme delle classi

di equivalenza dei cammini

con inizio e fine in x_0

con l'operazione di

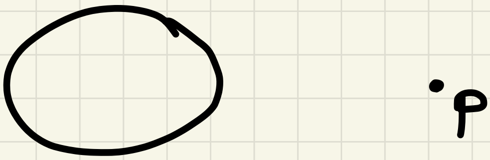
prodotto definita sopra



$$\boxed{\pi_1(X, x_0) \text{ è un } \underline{\text{gruppo}}}$$

<u>NB</u> $\pi_1(X, x_0)$ dipende da x_0

es. $X = S^1 \cup \{p\}$



$\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$

$\pi_1(\{p\}, p) = \{e\}$

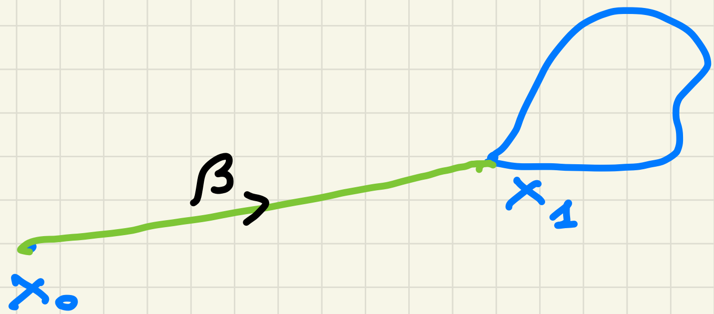
<u>Teorema</u> Se X è connesso per archi allora

$$\pi_1(X, x_0) \text{ e } \pi_1(X, x_1)$$

sono <u>isomorfi</u>.

<u>Teorema</u> Se X e Y sono connessi per archi e <u>omotopicamente equivalenti</u>, allora i gruppi fondamentali sono <u>isomorfi</u>

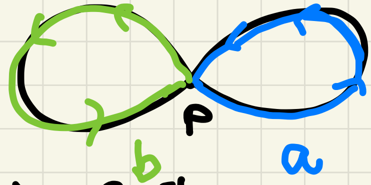
X connesso per archi



$$\pi_1(X, x_0) \longleftarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$\langle \beta^{-1}\alpha\beta \rangle \longmapsfrom \langle \alpha \rangle$$

esempi

$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ $\qquad$ $X =$ 

omotopicamente equivalenti

$$\pi_1(\infty, p) = \mathbb{F}_2$$

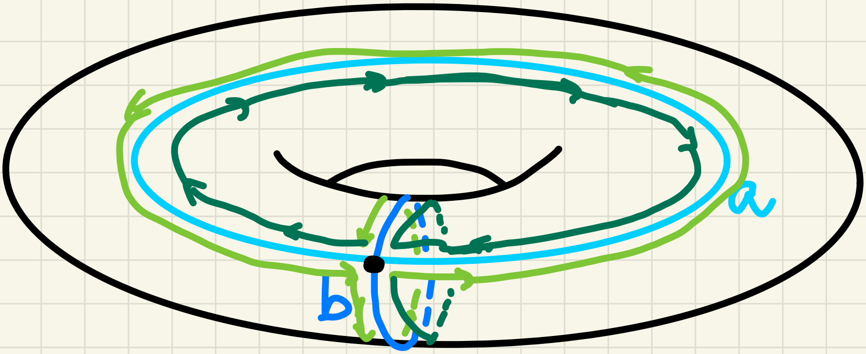
$\mathbb{F}_n$ gruppo libero su n generatori

$$a_1, \dots, a_n$$

$\mathbb{F}_n = \{$ tutte le possibili parole che si possono comporre con $a_i, a_i^{-1}, e \}$

prodotto giustapposizione con le regole $a_j a_j^{-1} = e$ $\quad a_j^{-1} a_j = e$

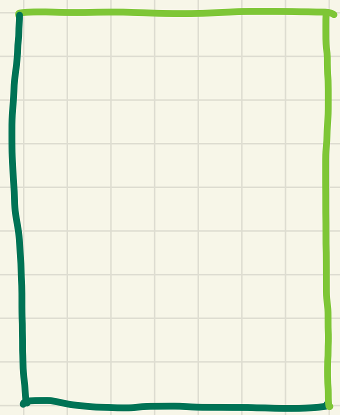
$a_j e = a_j \qquad e a_j = a_j$

$X =$ 

$$aba^{-1}b^{-1} = e$$

$$\Downarrow$$

$$ab = ba$$

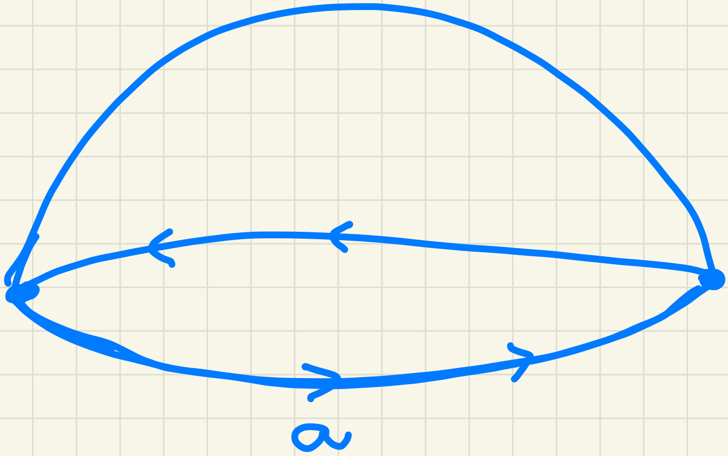


contrattile

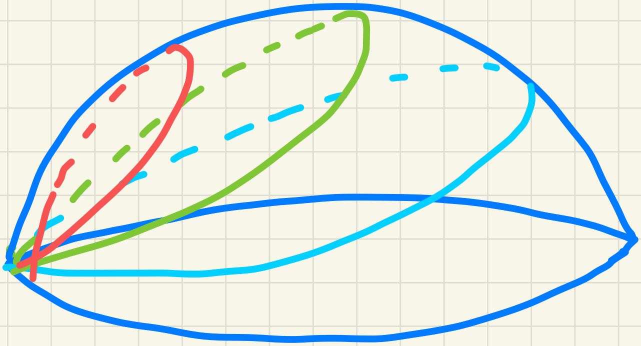
$$\pi_1(\text{Toro}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \text{(notazione additiva)}$$

$$(na, mb)$$

$X = P^2 R$



$a^2 = e$ $\pi_1 = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$



Corollario

X contraibile $\Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \{e\}$

$\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{e\}$

X localmente connesso per archi se $\forall\, x \in X$, $\forall\, V$ aperto con $x \in V$

$\exists\, U$ aperto t.c.

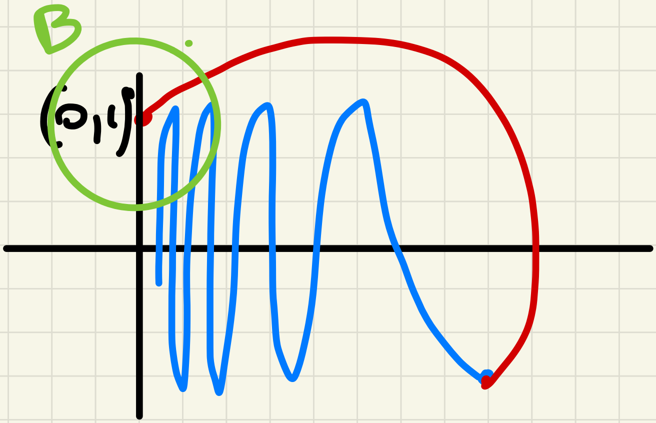
$x \in U \subset V$

t.c. $\forall\, x_1, x_2 \in U$

$\exists\, \alpha$ da x_1 a x_2

t.c. $\alpha(I) \subset V$

esempio



$X = (\text{grafico } \sin \frac{1}{x}) \cup (\text{arco rosso})$

X è connesso per archi

prendiamo $B((0,1), r)$ $\quad r<1$

$V = X \cap B \quad x=(0,1)$

non esiste U che soddisfi richieste.

Def Sia X connesso per archi e localmente connesso per archi. X è SEMPLICEMENTE CONNESSO se $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$

Siano X e Y connessi per archi e sia

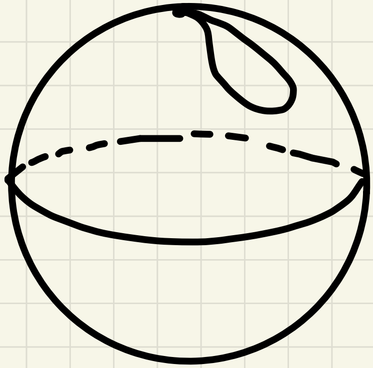
$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{continua}$$

Sia $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, y_0)$$

$$\langle \alpha \rangle \longmapsto \langle f \circ \alpha \rangle$$

omomorfismo di gruppi

$X = S^2 =$ 

S^2 è semplicemente connessa:

<u>OSS</u> $S^2 \setminus \{p\} \simeq$ piano contrattile

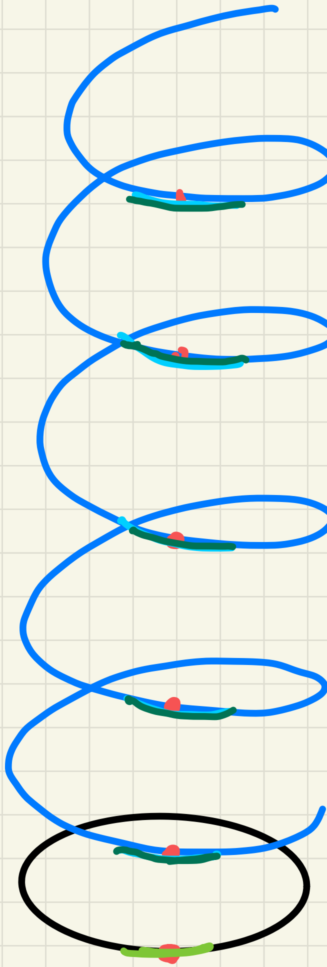
curve patologiche che coprono tutta la sfera possono essere omotopicamente "lisciate" a curve che lasciano fuori almeno un punto, sono tutte, quindi, omotope a $\langle e \rangle$.

$\mathbb{R}$

$\downarrow r$

$e^{2\pi}$

$\pi_1(\mathbb{R}) = \{0\}$



$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

In questa parte gli spazi sono tutti Hausdorff

Def Siano X e $\tilde{X}$ connessi per archi e localmente connessi per archi e sia $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ continua. La coppia $(\tilde{X}, p)$ è uno spazio di rivestimento di X se

1. p suriettiva
2. $\forall\, x \in X$ esiste un aperto $U \subseteq X$ t.c.
   a. $x \in U$
   b. $p^{-1}(U) =$ unione disgiunta di aperti ciascuno mappato omeomorficamente su U mediante p.

esempi:

① $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ già descritto

② $\boxed{X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \dfrac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}{\sim}}$

$(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1', x_2', x_3')$ se $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$

t.c. $(x_1', x_2', x_3') = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$\boxed{\tilde{X} = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3}$

$$p : \tilde{X} \longrightarrow X$$

$\tilde{x} \longmapsto$ retta per O che passa per $\tilde{x}$

$\tilde{X}$ rivestimento doppio di X

$p^{-1}(x) = \{$due punti$\}$

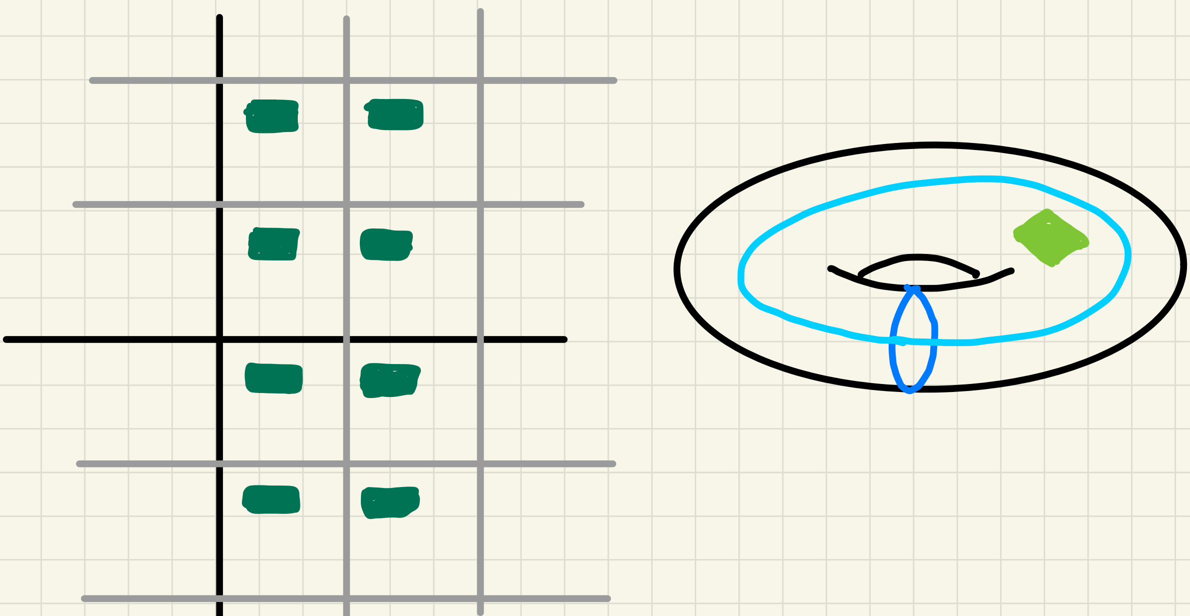
$X = S^1 \times S^1$ toro

$\tilde{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$p : \tilde{X} \longrightarrow X$$

$$(r_1, r_2) \longmapsto \left(e^{2\pi i r_1}, e^{2\pi i r_2}\right)$$

Rivestimento



$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$$

<u>Teorema</u> Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X e sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Allora

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

è iniettiva.

<u>Prop</u> Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X e siano x e $\tilde{x}$ con $p(\tilde{x}) = x$.
Allora c'è una corrispondenza

biunivoca tra

$p^{-1}(x)$ è l'insieme delle

$$\text{classi} \quad \frac{\pi_1(X, x)}{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))}$$

esempi ① $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$

$$r \longmapsto e^{2\pi i r}$$

$$p^{-1}(z) = \mathbb{Z} \simeq \frac{\pi_1(S^1, z)}{\underbrace{p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r))}_{\text{banale}}} \simeq \pi_1(S^1, z)$$

② $S^2 \xrightarrow{p} \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$p^{-1}(x) = 2 \text{ punti} \simeq \frac{\pi_1(\mathbb{P}^2)}{\underbrace{p_*(\pi_1(S^2))}_{\text{banale}}} \simeq \mathbb{Z}_2$$

③ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1 \times S^1$

$$(r_1, r_2) \longmapsto (e^{2\pi i r_1}, e^{2\pi i r_2})$$

$$p^{-1}(x) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \simeq \frac{\pi_1(S^1 \times S^1)}{\underbrace{p_*(\pi_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))}_{\text{banale}}}$$

informale

Teorema Sia X uno sp. top. connesso per archi, loc. connesso per archi, localmente semplicemente connesso. Allora esiste, unico a meno di isomorfismi, un rivestimento semplicemente connesso di X, $\tilde{X}$.

$\tilde{X}$ è detto rivestimento universale di X

inoltre $$\boxed{\frac{\tilde{X}}{\pi_1(X)} \simeq X}$$