Principio di Hamilton:

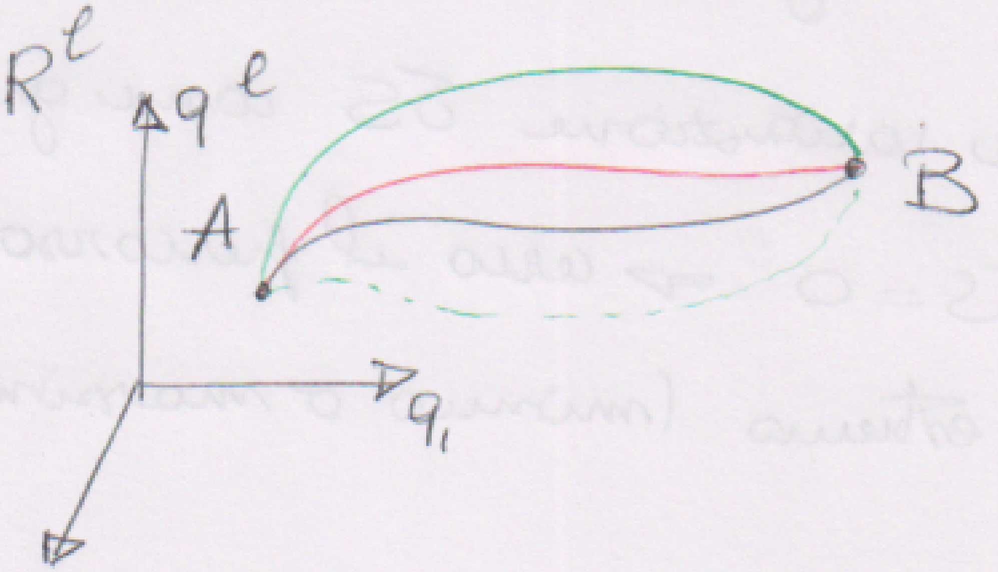
Derivazione delle equazioni della meccanica classica a partire da una formulazione integrale e calcolo delle variazioni

Consideriamo un sistema meccanico con n g.d.l. descritto dalla Lagrangiana L

$$L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \qquad \bar{q}, \dot{\bar{q}} \in R^n$$

$\bar{q} = (q_1, q_2 \dots q_n)$
↳ coord. general.

L'evoluzione del sistema mecc. può essere descritta dal moto della traiettoria $\bar{q}(t)$



A e B corrispondono a 2 configurazioni del mio sistema. In che modo il sistema passa da A a B? Considero TUTTI i possibili cammini in $\mathbb{R}^l$ che uniscono A con B

$$\bar{q}(t,\alpha) = \bar{q}_0(t) + \alpha\,\bar{\eta}(t)$$

parametro che mi permette di distinguere un cammino da un altro

$\bar{q}_0(t)$ è incognito, caratterizzerà l'estremo del funzionale

η : $\bar{\eta}(0) = \eta(T) = 0$

$q_0(0) = A \qquad q_0(T) = B$

Definiamo l' AZIONE Lagrangiana

$$S(T) = \int_0^T L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t)\,dt$$

Calcoliamo la variazione δS come già fatto e poniamo $\delta S = 0$ $\Rightarrow$ cerco il percorso che realizza un estremo (minimo o massimo) dell'azione

$$\delta S = \frac{d}{d\alpha} \int_0^T L(q(t,\alpha), \mathring{q}(t,\alpha), t)\, dt$$

$$= \int_0^T \sum_i \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}}_{=\,\eta_i} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} \underbrace{\frac{\partial \mathring{q}_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}}_{=\,\mathring{\eta}_i} \Big] dt$$

$$q_i(t,\alpha) = q_{0,i}(t) + \alpha\, \eta_i(t)$$

$$\mathring{q}_i(t,\alpha) = \mathring{q}_{0,i} + \alpha\, \mathring{\eta}_i(t)$$

Integriamo per parti $\displaystyle\int_0^T \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} \mathring{\eta}_i \, dt =$

$$= -\int_0^T \Big(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i}\Big) \cdot \eta_i \, dt + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} \eta_i \Big|_0^T} \to 0$$

ottieniamo

$$\delta S = \sum_i \int_0^T \Big(-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big) \eta_i \, dt = 0$$

per l'arb. di η_i : cond suff $\delta S = 0$ è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1 \dots l$$

Principio di Hamilton: ogni sistema meccanico si muove lungo una traiettoria che è staz. per l'azione Lagrangiana (un minimo)

"La Natura sceglie di minimizzare l'azione"

Principio di minima azione

Il princ. di Ham. può essere preso come postulato e da esso si ricavano le eq. di Lag. o equiv. di Newton

Equazioni di Hamilton

Nuova formulazione delle equazioni di moto di un sistema

Newton → LAGRANGE → HAMILTON

$F = ma$ | $\mathcal{L} = T - U$ | $\mathcal{H} = T + U$

Eq. II ord. | $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ | I ord.

II ord. | PIANO DELLE FASI

Vantaggi f. Hamilton: sviluppi nelle teorie moderne Fisica (M. Q.), Ing. (controllo);

Nuovi metodi risolutivi di eq di moto (Teoria Hamilton - Jacobi)

Nuovi risultati in teoria perturbativa (sistemi quasi-periodici)

Nella form. Lagr. le incognite sono le coord. gen. q_i

sistema n-g.d.l. $\Rightarrow$ $q_i(t)$ $i = 1 \dots n$

Le equazioni di moto $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ sono eq.

II ordine nelle q_i e possono essere esplicitate

nella forma

$$\ddot{q}_i = f_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad i = 1 \dots n \quad *$$

C'è un modo semplice e molte volte utile

per risolvere le eq. come eq. del I ordine.

Trattiamo $\bar{q}$ e $\dot{\bar{q}}$ come variabili INDIPENDENTI.

Indichiamo $\bar{y} = \dot{\bar{q}} \Rightarrow * = \dot{\bar{y}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{y}, t)$.

Così le variabili raddoppiano, lo stato del

mio sistema sarà individuato dalla

coppia $(\bar{q}, \bar{y}) = (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \underbrace{(q_1, q_2 \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)}_{2n}$

Ho $2n$ g.d.l.: ~~ho~~ un sistema è caratterizzato

dalla posiz. dei suoi punti (ind. dalle coord.

gen. $\vec{q}$.) e dalla loro velocità $\dot{\vec{q}}$.

Lo spazio $(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ prende il nome spazio degli stati

La teoria Ham. nasce come una trasformazione di coordinate ~~ecc~~ dallo spazio degli stati $\mathbb{R}^{2n}$ al cosiddetto spazio delle fasi: passo dalle $2n$ coordinate $(q, \dot{q})$ a $2n$ nuove coordinate.

L'idea è quella di considerare al posto di $\dot{q}$ (la velocità) l'impulso di un sistema, generalizz.

la relazione $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} = m\vec{v}$

Il ruolo dell'impulso, specie per le sue proprietà di conservazione, viene giocato in dinamica Lagrangiana dalle variabili cicliche.

Quantità conservata $\Rightarrow$ Variabile ciclica

q_i è ciclica se non compare nell'esp. della Lag (può comparire $\dot{q}_i$, coerentemente col fatto che q_i e $\dot{q}_i$ sono variabili indipendenti

Considero Eq. E-L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad L \text{ non dip. da } q_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = K \quad \text{costante di moto}$$

Caso di un punto in assenza di forze esterne

$$L = T = m\frac{\dot{q}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} = p \quad \text{quantità di moto}$$

per generalizzazione, si definisce

$$p_i \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad e \qquad \overline{P} = (p_1, p_2 \dots p_n)$$

Quantità di moto generalizzata o

Momento coniugato della coordinata q

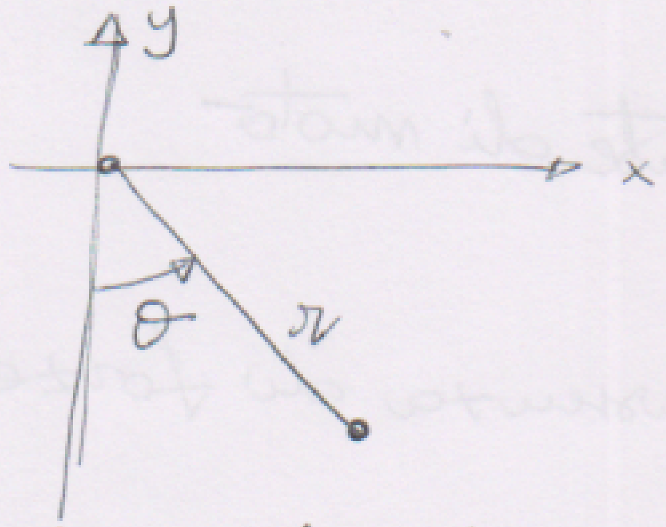
La descriz. Ham. del moto utilizza le variabili

$(\overline{q}, \overline{p})$ per descrivere il sistema

Coordinate canoniche: formano lo spazio delle fasi.

Si verifica che la trasf. $\overline{p} \leftrightarrow \dot{q}$ è invertibile

Es



Pendolo matematico $\qquad T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$

Assenza forza peso $\qquad L = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$

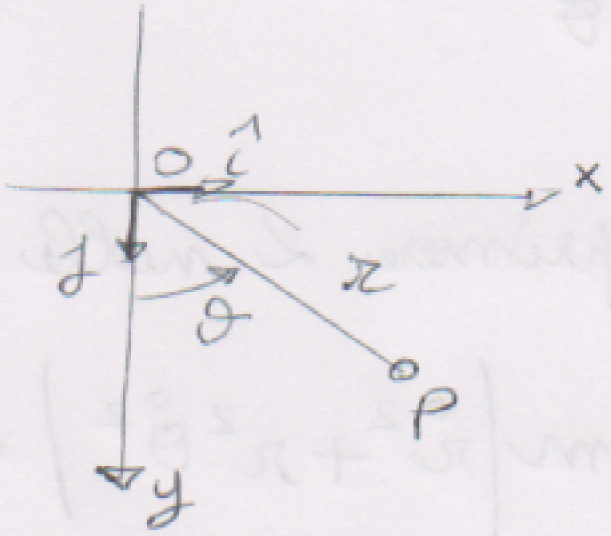
θ var. ciclica

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \text{Momento angolare del punto}$$

Vediamo adesso il cambio di coord $\dot{q} \to p$

Considero un punto libero di muoversi nel piano descritto in coord. polari

$$\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases} \qquad (P-O) = r\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j}$$

$$v_P = \frac{d}{dt}(P-O) = \dot{r}\,(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + r\,(\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{j})$$

$$T = \frac{1}{2} m\, v_P^2 = \frac{1}{2} m \left| \hat{i}(\dot{r}\sin\theta + \cos\theta\,\dot{\theta}\, r) + \hat{j}(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta} + \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right)$$

Momenti coniugati

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \xrightarrow{\text{INVERSO}} \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

Posso esprimere $\mathcal{L}$ nelle var. $(r, \theta, p_r, p_\theta)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} \right)$$

$$= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right)$$

Consideriamo il cambio di coordinate $\mathring{q} \to p$ più in generale.

Sappiamo che un cambio di coordinate è ben definito se lo Jacobiano corrisp. ha det. non nullo

$$\vec{\mathring{q}} \to \vec{p} : \quad (\mathring{q}_1, \mathring{q}_2 \dots \mathring{q}_n) \to (p_1, p_2 \dots p_n)$$

$$J = \frac{\partial p_k}{\partial \mathring{q}_h} \quad \text{mat } n \times n$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \mathring{q}_1} & \frac{\partial p_2}{\partial \mathring{q}_1} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \mathring{q}_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial p_n}{\partial \mathring{q}_1} & & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \mathring{q}_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial \mathring{q}_h} = \frac{\partial}{\partial \mathring{q}_h} \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_k} = \frac{\partial^2 L}{\partial \mathring{q}_h \mathring{q}_k} \qquad h, k = 1 \dots n$$

$L = T - U$ ma U non dip. da $\mathring{q}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_k \mathring{q}_h} = \frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_h \mathring{q}_k}$$

Ricordando l'esp.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \mathring{q}_i \mathring{q}_k$$

con $a_{ij} = \sum_{\pi} m \frac{\partial P_\pi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_\pi}{\partial q_j}$

a_{ij} è simm. def. positiva $\det(a_{ij})>0$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_h \partial \mathring{q}_k} = a_{hk}$$

$J_{h,k} = a_{hk} \Rightarrow$ trasf. $\mathring{q} \to p$ invertibile

$\Rightarrow$ posso sempre esprimere $\mathring{q} = \mathring{q}(p)$ partendo da $p = p(\mathring{q}) = \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}(q, \mathring{q}, t)$

NOTA: p per costruzione è noto in funzione dei $\mathring{q}$: $p = \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}(q, \mathring{q}, t)$
Se voglio utilizzare le p al posto delle $\mathring{q}$ nella Lag. e ottenere $L(p, q, t)$ devo poter invertire $p = p(\mathring{q}, q)$ in $\mathring{q} = \mathring{q}(p, q)$

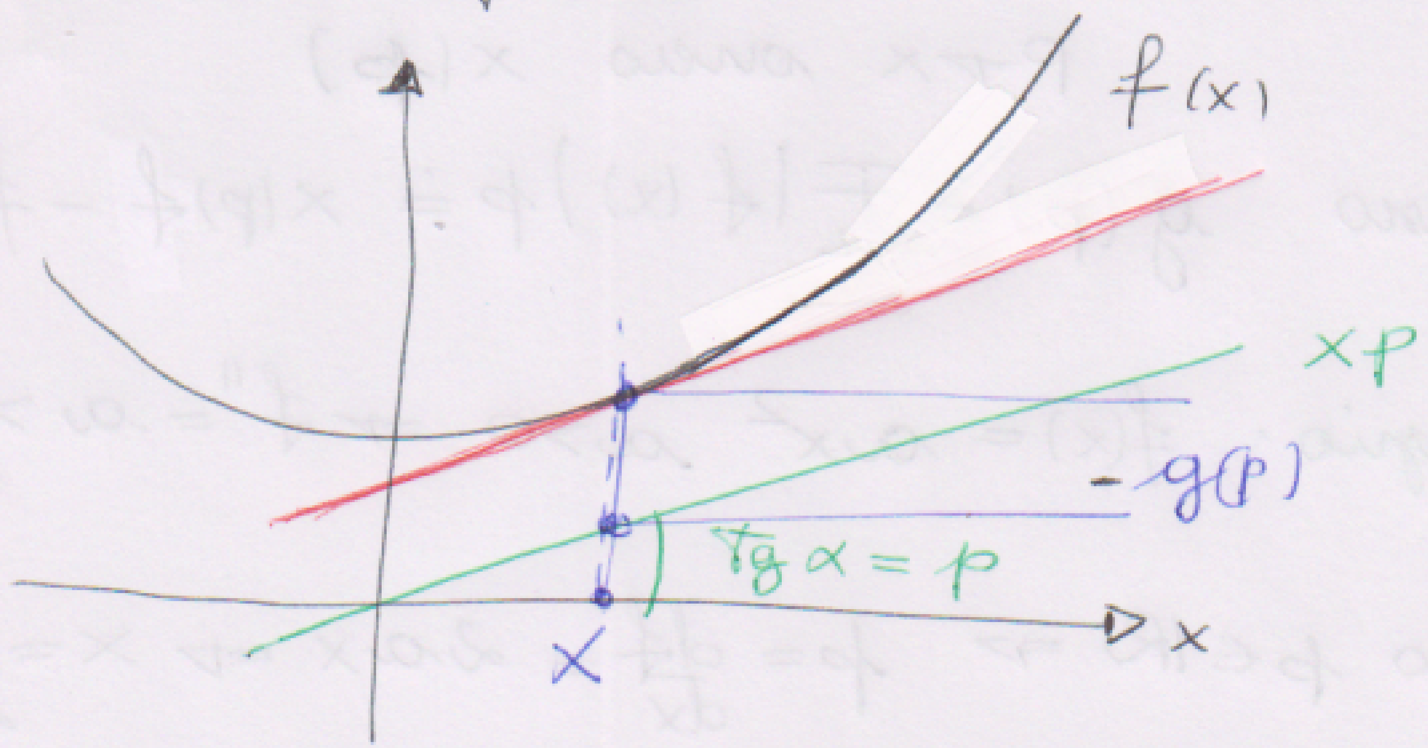
Trasformata di Legendre

- Introduce un cambio di variabili $x \to p$ invertibili $x(p)$ oppure $p(x)$ ed associa ad una funzione $f(x) \to g(p) = F_L(f(x))(p)$

$\downarrow$ trasf. Legendre

La costruzione è piuttosto involuta...

- Consideriamo una funz. $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONVESSA ovvero $f''(x) > 0$ (necessità tecnica affinché la t. Leg. sia ben definita



Fisso un numero p e considero la retta xp passante per l'origine. Cerco la coordinata x per cui $f(x)$ ha distanza minima dalla retta

$\Rightarrow \quad f(x) - xp \Rightarrow \min$

$$\frac{d}{dx} f - p = 0 \Rightarrow \frac{df}{dx} = p$$

La distanza minima tra i 2 grafici si ha in corrisp. di x t.c. $\frac{df}{dx} = p$ ↳ fissato

ovvero la tg. al grafico di f è $\parallel$ alla retta

chiamo $g(p) = xp - f(x) = \underline{x}(p)\,p - f(x(p))$

↓

Trasf. di Leg. di f

Ricapitolando: fisso p e cerco x t.c. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = p$

questo costituisce una relazione

$p \to x$ ovvero $x(p)$

definisco $g(p) \doteq \mathcal{F}_L[f(x)]\,p \doteq x(p)\,p - f(x(p))$

Esempio: $f(x) = ax^2 \quad a>0 \Rightarrow f'' = a > 0$

Fisso $p \in \mathbb{R} \Rightarrow p = \frac{df}{dx} = 2ax \Rightarrow x = \frac{p}{2a}$

$$\mathcal{F}_L[f](p) = g(p) = \underbrace{\frac{p}{2a}}_{x(p)}\,p - \underbrace{a\left(\frac{p}{2a}\right)^2}_{f(x(p))} = \frac{p^2}{4a}$$

$$ax^2 \xrightarrow{\mathcal{F}_L} \frac{p^2}{4a}$$

Da notare che la trasformata della trasformata riporta alla funzione di partenza

$$F_L(g(p))(x) = F_L[F_L(f(x))(p)](x) = f(x)$$

Verifichiamo

$$F_L(g(p))(x) = x\,p(x) - g(p(x)) =$$

$$= x\,p(x) - \underbrace{x\,p(x) + f(x(p(x)))}_{g(p(x))} = f(x)$$

$$x(p(x)) \equiv x$$

Applicazione alla Lagrangiana

Consideriamo un sistema con 1 g.d.l.

abbiamo visto che la trasformazione

$\dot{q} \to p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ è inv. $\quad \dot{q} = \dot{q}(p) \quad p = p(\dot{q})$

Più precisamente, essendo $(q, \dot{q})$ le variabili di L la trasf. va vista come $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$

$$p = p(\dot{q}, q)$$

q gioca il ruolo di un parametro.

Applichiamo la trasf. di Legendre a L dalla var. $\dot{q}$ a p.

otteniamo

$$F_L\,(\mathcal{L}(q,\dot q))(q,p) = \dot q\, p - \mathcal{L}(q, \dot q(p))$$

$$= \left(\dot q\, p - \mathcal{L}(q,\dot q)\right)\Big|_{\dot q = \dot q(p,q,t)}$$

La trasformata prende il nome di funzione Hamiltoniana del sistema.

$$\mathcal{H}(q,p,t) \doteq \left(\dot q\, p - \mathcal{L}(q,\dot q)\right)\Big|_{\dot q = \dot q(p,q,t)}$$

dove $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q}$

L'espressione si generalizza immed. a sist. con n g.d.l.

$$\mathcal{H}(\bar q, \bar p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot q_i\, p_i - \mathcal{L}(\bar q, \dot{\bar q})\Big|_{\dot q_i = \dot q_i(\bar p, \bar q, t)}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$$

Es. part. libera

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$\mathcal{H}(p,q) = \dot{q} p - \mathcal{L}(\dot{q}, q) \Big|_{\dot{q} = p/m} =$$

$$= \frac{p}{m} p - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} \equiv$ Energia della particella espressa tramite la variabile impulso

Es. particella in coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Energia cinetica $T = \dfrac{m v^2}{2} = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right)$

Part. libera $L = T$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r} m \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2\theta}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

$$\mathcal{H} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_\theta \dot{\theta} - L =$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m r^2 \sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{m r^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \sin^2\theta \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4\theta} + \frac{r^2 p_\theta^2}{m^2 r^4} \right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right)$$

Equazioni di Hamilton

$$\mathcal{H}(\bar{q},\bar{p},t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\Big|_{\dot{q}=\dot{q}(p,q,t)}$$

$\dot{q}$ è definita invertendo la relaz. $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}(q,\dot{q},t)$

Deriviamo $\mathcal{H}$ risp. a q_j

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(\bar{q},\dot{q},t)\right) =$$

$$= \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_r \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}}_{= p_r} \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left[\sum_i p_i \dot{q}_i - L(\dot{q},q,t)\right] =$$

$$= \sum_i \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_j}}_{\delta_{ij}} \dot{q}_i + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}$$

$$= \dot{q}_j + \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}\overbrace{\left[p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]}^{=0} = \dot{q}_j$$

Abbiamo ottenuto

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \overset{\text{eq. E-L.}}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt}p = -\dot{p}$$

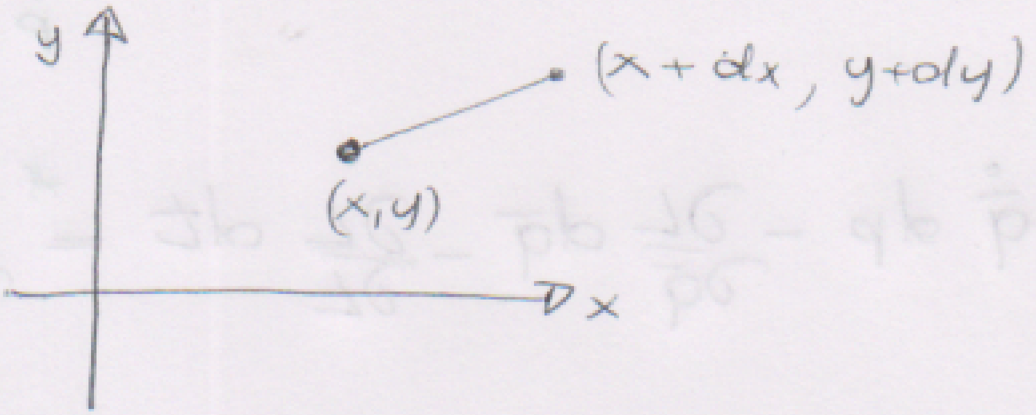
$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

ovvero
$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(\bar{q}, \bar{p}) \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(\bar{q}, \bar{p}) \end{cases}$$

EQUAZIONI di HAMILTON

Derivazione alternativa delle eq. di Ham tramite il concetto di differenziale

Considero $f(x,y)$, dove x ed y sono le var. indip.



Cerco la variazione di f quando $x \to x+dx$
$y \to y+dy$

$$\underset{\Downarrow}{\Delta f} \simeq df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

↳ differenziale della funzione

Applichiamo questo concetto alla f. di Hamilton

$$H(\bar{q}, \bar{p}, t) \Rightarrow \quad dH = \frac{\partial H}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad *$$

Utilizzo adesso la def. di H tramite L

$$H = \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

$$dH = dp \cdot \dot{\bar{q}} + p \cdot d\dot{\bar{q}} - d\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}}\, d\bar{q} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{\bar{q}}}\, d\bar{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt$$

$$dH = d\bar{p}\, \mathring{\bar{q}} + \cancel{\bar{p}\, d\mathring{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}}\, d\bar{q} \cancel{- \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \mathring{\bar{q}}}}_{= \bar{p}} d\mathring{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt$$

$$dH = \mathring{\bar{q}}\, dp - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}}\, d\bar{q} - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \overset{*}{=} \frac{\partial H}{\partial q}\, dq + \frac{\partial H}{\partial p}\, dp + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt$$

uguagliando i termini omologhi (indipendenza delle variazioni)

$$\mathring{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \underbrace{-\frac{\partial L}{\partial q}}_{= -\mathring{p}} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Equiv. Hamilton - Newton

particella sottoposta a forza conservativa

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \dot{q}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U(q)}{\partial q} = F = \dot{p}$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = F$$

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = \frac{F}{m} \qquad F = m\ddot{q}$$