13 marzo 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di venerdì 13 marzo 2020 (nei giorni 6 e 10 marzo non c'è stata lezione). La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Come abbiamo visto martedì 3 marzo, una classe importante di grafi è costituita dai grafi ***disegnati nel piano***.

Un grafo senza orientamento $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ si dice *disegnato nel piano* se:

(i) $\mathcal{V}$ è un insieme di punti del piano ;

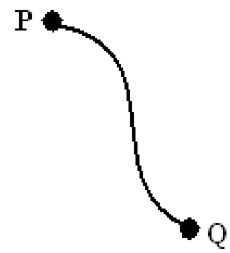
(ii) $\mathcal{L}$ è un insieme di archi di curve semplici nel piano ;

(iii) ι associa a ogni elemento di $\mathcal{L}$ l'insieme dei suoi due estremi.

Sia $[0, 1] := \{x \in \mathbb{R} / \, 0 \leq x \leq 1\}$ e sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei punti del piano.

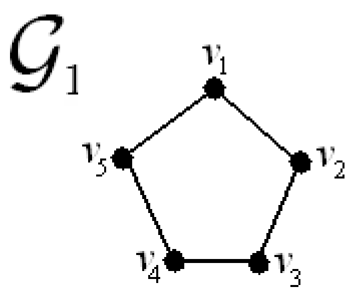
Si dice *arco di curva nel piano* l'immagine di una funzione continua $\mathbf{f} : [0, 1] \to \mathcal{P}$ (la continuità va riferita alla metrica euclidea nel piano; ma intuitivamente, la funzione è continua se la sua immagine può essere tracciata “senza sollevare la matita dal foglio”). I punti $\mathbf{f}(0)$ e $\mathbf{f}(1)$ si dicono *estremi* dell'arco di curva. Se $\mathbf{f}(0) \neq \mathbf{f}(1)$, l'arco di curva si dice *aperto*; se $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(1)$, l'arco di curva si dice *chiuso*. Se $\mathbf{f}$ è iniettiva (fatta salva comunque la possibilità che sia $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(1)$, cioè che l'arco sia chiuso) l'arco di curva si dice *semplice*. Anche qui, l'idea intuitiva è che la curva è semplice se non ripassa su se stessa!

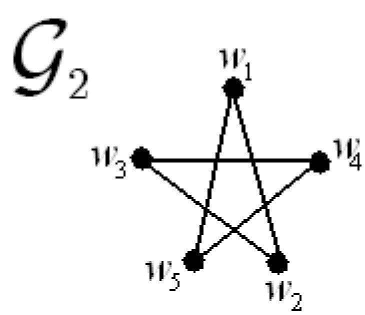
Questo è un arco di curva semplice nel piano con estremi **P** e **Q** :



Anche questo è un arco di curva nel piano con estremi **P** e **Q**, ma non è una curva *semplice* :

Strettamente parlando, due grafi disegnati nel piano sono diversi se hanno un diverso insieme di punti e/o hanno un diverso insieme di lati e/o la funzione di incidenza (quando gli insiemi dei vertici e dei lati coincidono) opera diversamente. Questo è chiaro per il significato della parola “*uguale*”: $(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota) = (\mathcal{V}^*, \mathcal{L}^*, \iota^*)$ se e soltanto se $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ e $\iota = \iota^*$. Però è intuitivo che “disponendo diversamente” i vertici nel piano e/o “disegnando diversamente” i lati non cambia molto purché riusciamo a far corrispondere gli elementi di $\mathcal{V}$ con gli elementi di $\mathcal{V}^*$e gli elementi di $\mathcal{L}$ con gli elementi di $\mathcal{L}^*$ in modo che le funzioni di incidenza ι e ι^* operino “in modo coerente”. Questi due grafi sono, strettamente parlando, *diversi*; ma hanno ***molto*** in comune:





In effetti, se facciamo corrispondere a ciascun vertice v_i di $\mathcal{G}_1$ il vertice w_i di $\mathcal{G}_2$ ci accorgiamo che due vertici di $\mathcal{G}_1$ sono adiacenti se e soltanto se i vertici corrispondenti sono adiacenti in $\mathcal{G}_2$. Diciamo che i grafi $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ sono ***isomorfi***. Ecco la definizione:

Siano $\mathcal{G}_1 := (\mathcal{V}_1, \mathcal{L}_1, \iota_1)$ e $\mathcal{G}_2 := (\mathcal{V}_2, \mathcal{L}_2, \iota_2)$ grafi. Si dice *isomorfismo* tra $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ una coppia (φ, ψ) tale che:

(i) φ è una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$;

(ii) ψ è una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$;

(iii) per ogni $\ell \in \mathcal{L}_1$, $\varphi(\iota_1(\ell)) = \iota_2(\psi(\ell))$.

Si noti che questa definizione ha senso (leggermente diverso) sia per i grafi senza orientamento sia per i grafi con orientamento.

Siano $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ grafi. Si dice che “*$\mathcal{G}_2$ è isomorfo a $\mathcal{G}_1$*”(o anche che “*$\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ sono isomorfi*”) se esiste un isomorfismo fra $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.

Particolarmente importante è il caso in cui $\mathcal{G}_1$ è un grafo qualsiasi e $\mathcal{G}_2$ è un grafo disegnato nel piano isomorfo a $\mathcal{G}_1$: in questo caso si dice che $\mathcal{G}_2$ ***è un disegno nel piano*** di $\mathcal{G}_1$.

Non è difficile convincersi che vale il

Teorema 1.8.1

Per ogni grafo finito $\mathcal{G}$ esiste un disegno di $\mathcal{G}$ sul piano.

Vediamo adesso altri esempi di grafi.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo senza orientamento. Si dice che $\mathcal{G}$ è *bipartito* se esistono $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$ tali che

(i) $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ (ossia: $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ è una partizione di $\mathcal{V}$ ([1]))

e inoltre

(ii) per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, se $\iota(\ell) = \{v, w\}$ allora $v \in \mathcal{V}_1$ e $w \in \mathcal{V}_2$ oppure $w \in \mathcal{V}_1$ e $v \in \mathcal{V}_2$ (ossia: gli estremi di ogni lato appartengono a elementi diversi della partizione $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$).

Osservazione 1.4.1

Un grafo bipartito non ha cappi.

[1] cfr. la sez. 1.11 negli appunti di algebra.

Esempio 1.4.2

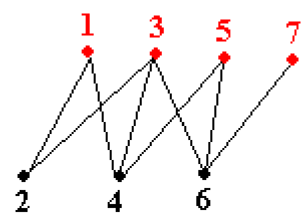
Il seguente grafo è bipartito: $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ dove

$\mathcal{V} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

$\mathcal{L} := \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$;

$\iota := \mathbf{id}_{\mathcal{L}}$.

Ecco un disegno nel piano di $\mathcal{G}$:



Intuitivamente, un grafo è bipartito se è possibile assegnare un “colore” scelto fra due (rosso e nero, rosso e verde, o quei due colori che vi piacciono di più...) in modo che ogni lato abbia estremi di colore diverso.

i grafi $\boldsymbol{K}_{m,n}$

Per ogni coppia di numeri naturali $\{m, n\}$ con $m, n \geq 1$, si ponga

$v_i := (i, 0)$ per $i := 1, \ldots, m$

e

$w_j := (0, j)$ per $j := 1, \ldots, n$.

Si indica con $\boldsymbol{K}_{m,n}$ (e si dice *grafo completo bipartito* su m e n vertici) il grafo $(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ dove

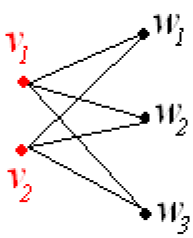
$\mathcal{V} := \{v_1, v_2, ..., v_m, w_1, w_2, ..., w_n\}$;

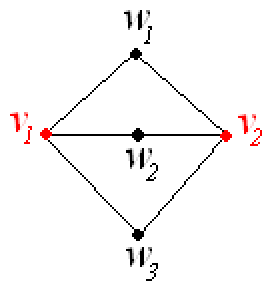
$\mathcal{L} := \{\{v_i, w_j\} \in P(\mathcal{V}) \;/\; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$;

$\iota := \mathbf{id}_{\mathcal{L}}$.

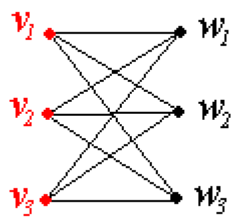
L’aggettivo “*completo*” nel nome di $\boldsymbol{K}_{m,n}$ sta a indicare che $\boldsymbol{K}_{m,n}$ possiede tutti i lati possibili compatibilmente con la condizione di essere un grafo bipartito semplice.

Due disegni nel piano del grafo $\boldsymbol{K}_{2,3}$:





Un disegno nel piano del grafo $\boldsymbol{K}_{3,3}$:



il grafo di Petersen

Si ponga

$$v_i := (i, 0) \quad \text{per } i := 1, \dots, 5$$

e

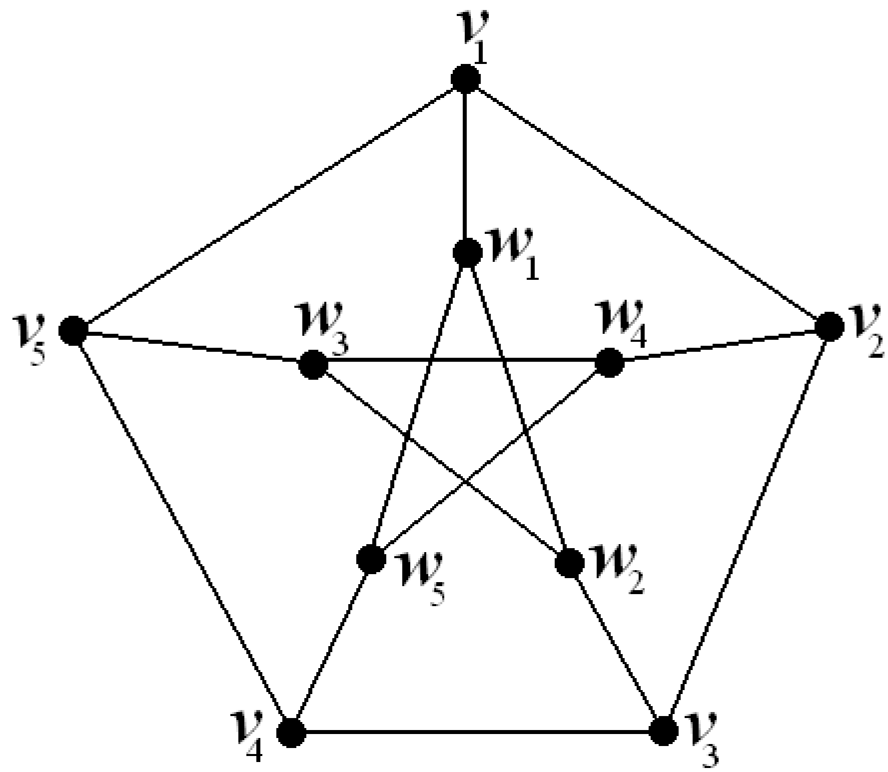
$$w_j := (0, j) \quad \text{per } j := 1, \dots, 5\,.$$

Si dice grafo di Petersen il grafo $(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ dove

$\mathcal{V} := \{v_1, v_2, ..., v_5, w_1, w_2, ..., w_5\}$;

$\mathcal{L} := \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_3, w_4\}, \{w_4, w_5\}, \{v_1, w_1\}, \{v_2, w_4\}, \{v_3, w_2\}, \{v_4, w_5\}, \{v_5, w_3\}\}$;

$\iota := \mathbf{id}_{\mathcal{L}}$.


v_1
w_1
v_5
w_3
w_4
v_2
w_5
w_2
v_4
v_3