17 marzo 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di martedì 17 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento (oggi considereremo soltanto grafi ***senza*** orientamento).

Se v, w sono vertici di $\mathcal{G}$, accade una e una soltanto di queste tre cose:

– $v = w$. In questo caso, come si è già detto, consideriamo v connesso con se stesso, e diciamo che la distanza di v da se stesso è ***zero***.

– v e w appartengono a due diverse componenti connesse di $\mathcal{G}$. In questo caso v e w non sono connessi (non esiste nessun cammino, e quindi nessuna passeggiata di estremi v e w), e diciamo che la loro distanza è ***infinita***.

– v e w appartengono alla stessa componente connessa di $\mathcal{G}$. In questo caso esiste almeno un cammino che ha per estremi v e w, ma in generale ne esisteranno parecchi, e di diverse lunghezza. L’insieme di tutte le lunghezze di tutti i cammini che hanno per estremi v e w è un insieme non vuoto di numeri naturali e quindi (ricordate il teorema 7.1.2 degli appunti di algebra?) ha minimo: tale minimo è la lunghezza del cammino di lunghezza minima che ha per estremi v e w, e si dice (in questo caso) disanza tra v e w.

Questo concetto di distanza fra due vertici ci permette di dare una caratterizzazione dei grafi bipartiti (abbiamo introdotto i grafi bipartiti nella prima lezione “virtuale” di venerdì 13 marzo, e potete comunque guardare a pagina 8 degli appunti sui grafi) basata sulla lunghezza dei loro sottografi ciclici.

Consideriamo in primo luogo i grafi $\boldsymbol{C}_n$ (pagina 9 degli appunti) e vediamo quando sono bipartiti. Per questi grafi in effetti non ci sono grandi dubbi su come suddividere i vertici nei due sottoinsiemi $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ richiesti dalla definizione di grafo bipartito: partiamo dal vertice 1, e diciamo che $1 \in \mathcal{V}_1$; allora necessariamente $2 \in \mathcal{V}_2$ (per definizione di grafo bipartito), e allo stesso modo $3 \in \mathcal{V}_1$, $4 \in \mathcal{V}_2$ e più in generale tutti i vertici dispari devono appartenere a $\mathcal{V}_1$ e tutti i vertici pari devono appartenere a $\mathcal{V}_2$ (fate i bravi, e formalizzate la dimostrazione di questo fatto procedendo per induzione su i). Ma siccome il vertice n è adiacente al vertice 1, se $\boldsymbol{C}_n$ è bipartito bisogna che il vertice n appartenga a $\mathcal{V}_2$, ossia n deve essere ***pari***. Questo dimostra che se il grafo $\boldsymbol{C}_n$ è bipartito allopra n è pari, ma è immediato verificare che vale il viceversa: se n è pari possiamo suddividere gli n vertici di $\boldsymbol{C}_n$ in due sottoinsiemi $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ che verificano i requisiti posti dalla definizione di grafo bipartito, semplicemente mettendo in $\mathcal{V}_1$ tutti i vertici dispari e in $\mathcal{V}_2$ tutti i vertici pari.

Ora facciamo un salto per arrivare ai cicli di una grafo nel senso visto la volta precedente (ciclo inteso come cammino semplice chiuso). Formalmente è un salto, ma concettualmente non lo è: pensateci bene, se la sequenza finita

$$v_0,\, \ell_1,\, v_1,\, \ell_2,\, v_2,\, \ell_3,\, v_3,\, ...,\, \ell_s,\, v_s = v_0$$

è un ciclo ($=$ cammino semplice chiuso) di $\mathcal{G}$, allora il sottografo di $\mathcal{G}$ che ha per vertici v_0, v_1, v_2, v_3, ..., v_s e ha per lati ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ..., ℓ_s è un sottografo di $\mathcal{G}$ isomorfo a $\boldsymbol{C}_{s+1}\dots$

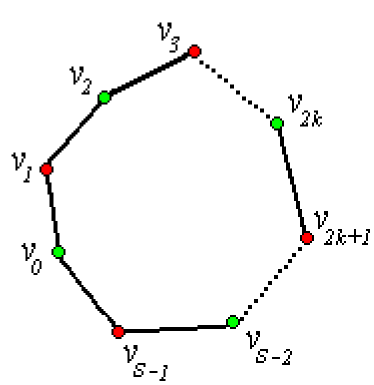
Teorema 2.3.1

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso senza orientamento. $\mathcal{G}$ è un grafo bipartito se e solo se ogni ciclo di $\mathcal{G}$ ha lunghezza pari.

Dimostrazione – Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ bipartito, e sia $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ la partizione di $\mathcal{V}$ tale che ogni $\ell \in \mathcal{L}$ ha un estremo in $\mathcal{V}_1$ e l'altro in $\mathcal{V}_2$. Sia C

$$v = v_0,\, \ell_1,\, v_1,\, \ell_2,\, v_2,\, ...,\, v_{s-1},\, \ell_s,\, v_s = v$$

un ciclo di $\mathcal{G}$ (di lunghezza s), e supponiamo (per fissare le idee) che sia $v_0 \in \mathcal{V}_1$.



Poiché ogni ℓ_i ha un estremo in $\mathcal{V}_1$ e l'altro in $\mathcal{V}_2$, devono appartenere a $\mathcal{V}_1$ anche v_2, v_4, $v_6, \dots$ e ogni v_j con j pari; mentre devono appartenere a $\mathcal{V}_2$ i vertici v_3, v_5, $v_7, \dots$ e ogni v_k con k dispari. Poiché $v_s = v = v_0$, è $v_s \in \mathcal{V}_1$ e dunque s è pari, cioè C è un ciclo di lunghezza pari.

Viceversa, supponiamo che ogni ciclo di $\mathcal{G}$ abbia lunghezza pari, e sia $v_0 \in \mathcal{V}$. Poniamo

$$\mathcal{V}_1 := \{v \in \mathcal{V} \mathbin{/} d(v_0, v) \text{ è pari}\}, \qquad \mathcal{V}_2 := \{v \in \mathcal{V} \mathbin{/} d(v_0, v) \text{ è dispari}\}.$$

Poiché $\mathcal{G}$ è connesso, ogni $v \in \mathcal{V}$ è connesso a v_0, e dunque $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$; ovviamente $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$, cosicché $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ è una partizione di $\mathcal{V}$.

Supponiamo per assurdo che esista un $\ell \in \mathcal{L}$ con gli estremi w_1, w_2 entrambi appartenenti allo stesso $\mathcal{V}_i$; allora esiste un cammino semplice C_1 di lunghezza $s = d(v_0, w_1)$ di estremi v_0 e w_1

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_s = w_1$$

ed esiste un cammino semplice C_2 di lunghezza $t = d(v_0, w_2)$ di estremi w_2 e v_0

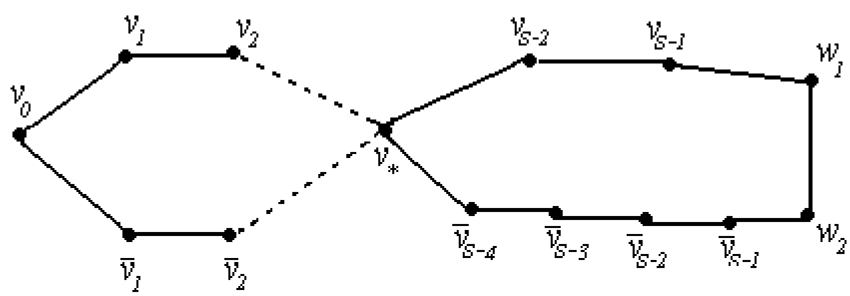
$$v_0, \overline{\ell}_1, \overline{v}_1, \overline{\ell}_2, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_{t-1}, \overline{\ell}_t, \overline{v}_t = w_2$$

dove i numeri naturali s e t sono entrambi pari (se $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_1$) oppure entrambi dispari (se $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_2$).

Può naturalmente accadere che C_1 e C_2 abbiano qualche vertice in comune; sia v_* quello fra essi avente massima distanza da v_0: allora i cammini

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_* \qquad \text{e} \qquad v_0, \overline{\ell}_1, \overline{v}_1, \overline{\ell}_2, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_{t-1}, \overline{\ell}_t, v_*$$

devono avere la stessa lunghezza l_0, altrimenti si potrebbe sostituire il più breve al più lungo ottenendo un cammino di lunghezza minore della distanza fra gli estremi.



Ne segue che i cammini semplici

$$(\mathcal{D}_1) \quad v_*, \ell_i, v_i, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_s = w_1 \qquad \text{e} \qquad (\mathcal{D}_2) \quad v_*, \overline{\ell}_j, \overline{v}_j, ..., \overline{v}_{t-1}, \overline{\ell}_t, \overline{v}_t = w_2$$

hanno rispettivamente lunghezza $s - l_0$ e $t - l_0$, e tali lunghezze sono entrambe pari oppure entrambe dispari (perché per ipotesi s e t erano entrambi numeri pari oppure entrambi numeri dispari). Ma allora $\mathcal{D}_1 + \ell + \mathcal{D}_2$ è un ciclo di lunghezza dispari $(\text{pari} + \text{pari} + 1,$ oppure $\text{dispari} + \text{dispari} + 1)$ contro l'ipotesi che ogni circuito di $\mathcal{G}$ abbia lunghezza pari.

Dunque ogni lato di $\mathcal{G}$ ha un estremo in $\mathcal{V}_1$ e l'altro in $\mathcal{V}_2$, e quindi $\mathcal{G}$ è un grafo bipartito, come si voleva dimostrare.

$\boxed{\text{Esercizio 2.3.2}}$

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso senza orientamento. Si dimostri che $\mathcal{G}$ è un grafo bipartito se e solo se ogni circuito di $\mathcal{G}$ ha lunghezza pari.

Suggerimento – Si dimostri che in un grafo esiste un ciclo di lunghezza dispari se e solo se esiste un circuito di lunghezza dispari.

Visto che siete chiusi in casa, provate ***davvero*** a farlo, questo esercizio... Mandatemelo (marco.barlotti@unifi.it) e io ve lo correggo!

E questa lezione la finiamo qui, non perché sia finita la prima ora ma perché cambiamo argomento, e la seconda ora sarà più lunga della prima!