17 marzo 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di martedì 17 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Questa seconda “ora” di lezione è molto più corposa della precedente, perché ci sono alcuni teoremi con le loro dimostrazioni; ma concettualmente stiamo andando “in discesa”, cioè da adesso in poi non ci saranno più tante pidocchiose definizioni da assorbire: ogni lezione introdurrà un concetto soltanto, indicativamente potremmo dire che in ogni lezione da ora in poi incontreremo una nuova “famiglia” di grafi che verrà presentata con le sue proprietà (e, soprattutto, cercando di dare criteri per individuare quali grafi appartengono alla famiglia).

Anche in questa lezione tutti i grafi saranno senza orientamento. Del resto il concetto che studiamo in questa lezione è molto legato all’idea di “connessione”, e come abbiamo visto la connessione è una proprietà che si “legge” ***sul sostegno*** del grafo senza orientamento associato al nostro grafo $\mathcal{G}$, anche quando $\mathcal{G}$ è un grafo con orientamento.

Riprendiamo in esame il teorema 2.2.6 che abbiamo visto nella seconda lezione di venerdì 13 marzo: una condizione ***necessaria*** (ma ***non sufficiente***!) affinché un grafo con n vertici e λ lati sia connesso è che valga la disuguaglianza

$$\lambda \geq n - 1 \,.$$

Abbiamo a suo tempo osservato (ma vale la pena ripeterlo) che questa condizione significa in sostanza che se ci sono *troppo pochi* lati (in rapporto al numero dei vertici) il grafo non può essere connesso. Un lato che connette due vertici può ragionevolmente essere la schematizzazione di un cavo che trasmette dati tra due elaboratori elettronici. Capite che i cavi costano (soprattutto se vengono messi fra punti distanti o scomodamente raggiungibili del globo terrestre), quindi ci si può chiedere: se dobbiamo connettere n vertici, quel valore $n - 1$ sotto il quale non si può scendere (per il teorema 2.2.6) è però sempre sufficiente? In altre parole, esistono grafi *connessi* con n vertici ed esattamente $n - 1$ lati?

Tenete presente che risparmiare va bene, ma qualche connessione in più ci tranquillizza sulla stabilità della rete: se connettete n vertici utilizzando soltanto $n-1$ lati, quando per un terremoto o un attentato terroristico (o chissà che cosa altro che adesso non ci immaginiamo) accade che un lato “salta”, anche la connessione della rete “salta”. Vabbè, questo per dire che economizzare all’osso non è detto che sia una scelta intelligente (anzi fatemelo dire: non lo è mai). Ma torniamo a noi.

La risposta alla domanda formulata nel paragrafo precedente è: ***sì***! Un grafo connesso con n vertici può avere esattamente $n-1$ lati, e questo accade se e soltanto se non ci sono cicli (e quindi nemmeno circuiti). Un grafo connesso senza cicli (che quindi, come vedremo alla fine di questa lezione, ha un numero di lati inferiore di 1 al numero dei vertici) si dice un ***albero***.

Si dice *albero* un grafo connesso senza cicli. Si dice *foresta* un grafo senza cicli.

Osservazione 3.1.1

Ciascuna componente connessa di una foresta è un albero.

Dimostrazione – Ovvio per il teorema 2.2.8 .

Osservazione 3.1.2

Una foresta è semplice e priva di cappi.

Dimostrazione – Sia $\mathcal{G}$ un grafo: proviamo che se non è semplice, oppure ha cappi, ha cicli e dunque non è una foresta. In effetti, se in $\mathcal{G}$ esistono due lati distinti ℓ_1 e ℓ_2 incidenti la stessa coppia di vertici $\{v, w\}$, c’è il ciclo

$$v, \ell_1, w, \ \ell_2, v\,;$$

se in $\mathcal{G}$ c’è un cappio ℓ incidente un certo vertice v, c’è il ciclo

$$v, \ell, v\,.$$

Osservazione 3.1.3

Una foresta non ha circuiti.

Dimostrazione – Per il teorema 2.1.4, un circuito di lunghezza minima è un ciclo.

Queste osservazioni sono veramente banali, ma ci sono un paio di teoremi interessanti che caratterizzano gli alberi come grafi connessi dotati di certe proprietà di minimalità; ad esempio, sia $\mathcal{G}$ connesso e senza cappi: $\mathcal{G}$ è un albero se e soltanto se comunque presi due vertici distinti di $\mathcal{G}$ esiste ***esattamente un*** cammino che li ha per estremi; oppure: $\mathcal{G}$ è un albero se e soltanto se comunque si tolga un lato si ottiene un grafo non più connesso. Vediamo per bene l'enunciato di questi fatti e la loro dimostrazione.

Teorema 3.2.1

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo. Sono fatti equivalenti:

(i) $\mathcal{G}$ è un albero;

(ii) $\mathcal{G}$ è privo di cappi, e comunque presi due vertici distinti di $\mathcal{G}$, in $\mathcal{G}$ esiste esattamente un cammino che li ha per estremi;

(iii) $\mathcal{G}$ è connesso, ma togliendo un lato qualsiasi il grafo risultante non è connesso.

Dimostrazione –

$(i) \Rightarrow (ii)$. Per l'osservazione 3.1.2, $\mathcal{G}$ è privo di cappi. Per definizione di albero, $\mathcal{G}$ è connesso; dunque comunque presi due vertici distinti esiste almeno un cammino che li ha per estremi: resta da provare che ce n'è uno solo. Supponiamo per assurdo che esistano due vertici distinti v, w di $\mathcal{G}$ tali che esistono in $\mathcal{G}$ due diversi cammini

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{r-1}, \ell_r, v_r = w$$

e

$$v = v_0, \ell_1^*, v_1^*, \ell_2^*, v_2^*, ..., v_{s-1}^*, \ell_s^*, v_s^* = w$$

di estemi v e w. Scegliamo v e w in modo che la loro distanza sia minima: questo comporta che i vertici v_i e v_j^* sono a due a due tutti distinti tra loro. Ma allora “percorrendo” il primo cammino da v a w e poi (“a ritroso”) il secondo cammino da w a v si ottiene un circuito in $\mathcal{G}$, e ciò è assurdo (come volevamo) perché $\mathcal{G}$ è un albero.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Per la (ii), comunque presi due vertici distinti di $\mathcal{G}$ esiste un cammino che li ha per estremi: dunque $\mathcal{G}$ è connesso. Sia $\mathcal{G}_1$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo un lato ℓ qualsiasi, e sia $\iota(\ell) = \{v, w\}$; poiché in $\mathcal{G}$ non ci sono cappi, $v \neq w$ e dunque in $\mathcal{G}$ c'è il cammino

$$v, \ell, w\,.$$

Per la (ii), non ci sono altri cammini di estremi v e w. Dunque in $\mathcal{G}_1$ v e w non sono connessi e pertanto $\mathcal{G}_1$ non è connesso.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Per la (iii) $\mathcal{G}$ è connesso; se in $\mathcal{G}$ ci fosse un ciclo, per il teorema 2.2.5 ciascun grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo un qualsiasi lato del ciclo sarebbe ancora un grafo connesso, e ciò sarebbe assurdo per la (iii): dunque in $\mathcal{G}$ non ci sono cicli, e quindi $\mathcal{G}$ è un albero, come si voleva.

Non so se è chiaro il modo in cui si è dimostrato nel teorema 3.2.1 che i tre fatti (i), (ii) e (iii) sono a due a due equivalenti. Tale affermazione significa che:

(1) – se nel grafo $\mathcal{G}$ vale la (i) allora vale anche la (ii);
(2) – se nel grafo $\mathcal{G}$ vale la (ii) allora vale anche la (i);
(3) – se nel grafo $\mathcal{G}$ vale la (i) allora vale anche la (iii);
(4) – se nel grafo $\mathcal{G}$ vale la (iii) allora vale anche la (i);
(5) – se nel grafo $\mathcal{G}$ vale la (ii) allora vale anche la (iii);
(6) – se nel grafo $\mathcal{G}$ vale la (iii) allora vale anche la (ii).

Infatti $(1)+(2)$ significano che la (i) e la (ii) sono equivalenti; $(3)+(4)$ significano che la (i) e la (iii) sono equivalenti; $(5)+(6)$ significano che la (ii) e la (iii) sono equivalenti. Ma nella dimostrazione abbiamo esplicitamente provato soltanto le affermazioni (1), (5) e (4). Perché valgono anche la (2), la (3) e la (6)?

Forse non ci sarebbe bisogno che io esplicitassi questo ragionamento (che non a caso negli appunti resta sottinteso!), ma tant'è. . .

Come si fa a capire che l'affermazione (2) è vera? Basta osservare che nella dimostrazione del teorema si è mostrato che quando vale la (ii) vale anche la (iii) e che quando vale la (iii) vale anche la (i): mettendo insieme queste due informazioni si ricava che quando vale la (ii) vale anche la (i)! (Esercizio: provate, con i metodi studiati nella logica proposizionale, che $\{p \to q, q \to s\} \vDash p \to s$).

Allo stesso modo si capisce che l'affermazione (3) è conseguenza logica della (1) e della (5), e che l'affermazione (6) è conseguenza logica della (4) e della (1).

La seguente osservazione ci farà comodo più avanti (e comunque è bello sapere che un albero deve avere qualche foglia, no? ricordate che una foglia è un vertice di grado 1):

Teorema 3.2.2

In un albero finito che non consista di un solo vertice ci sono almeno due foglie.

Dimostrazione – Poiché l'albero è finito, si possono trovare due vertici v e w che hanno distanza massima d (cfr. sez. 2.3). Proviamo che v e w hanno grado 1.

Supponiamo per assurdo che (ad esempio) v non abbia grado 1: poiché l'albero non consiste di un solo vertice, se v non ha grado 1 ha grado almeno 2; sia allora ℓ un lato incidente a v diverso da ℓ_1 e sia $\iota(\ell) = \{v, \overline{v}\}$. Sia

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ \ell_2, v_2, ..., \ \ell_d, v_d = w$$

un cammino di lunghezza d con estremi v e w.

Se $\overline{v} = v_{i_0}$ per qualche i_0 compreso tra 0 e d si ha un circuito

$$\overline{v} = v_{i_0}, \ell, v = v_0, \ell_1, v_1,\ \ell_2, v_2, ...,\ \ell_{i_0}, v_{i_0}$$

assurdo per definizione di albero. Se invece $\overline{v} \neq v_i$ per $i := 0,\ ...,\ d$, $\overline{v}$ e w sono due vertici dell'albero aventi distanza $d+1$: infatti

$$\overline{v}, \ell, v = v_0, \ell_1, v_1,\ \ell_2, v_2, ...,\ \ell_d, v_d = w$$

è un cammino di lunghezza $d+1$ con estremi v e w (ed è necessariamente l'unico cammino di estremi v e w, per la (ii) del teorema 3.2.1). (***Fate un disegno***!!!) Ma ciò è assurdo, perché avevamo scelto v e w in modo che avessero distanza massima.

In ogni caso si raggiunge un assurdo, dunque v ha grado 1; ed esattamente allo stesso modo si dimostra che w ha grado 1.

Esempio 3.2.3

Sia $\mathcal{G} := (\mathbb{Z}, \mathcal{L}, \mathbf{id}_{\mathcal{L}})$ il grafo (infinito) che ha per vertici i numeri interi relativi e per lati le coppie $\{n, n+1\}$ con l'identità come funzione di incidenza. $\mathcal{G}$ è un albero (infinito) senza foglie.

Concludiamo questa lezione mostrando quanto avevo affermato all'inizio, cioè che gli alberi sono proprio quei grafi connessi che hanno il minimo numero possibile di lati!

Teorema 3.2.4

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo finito con $|\mathcal{V}| = n$ e $|\mathcal{L}| = \lambda$. Sono fatti equivalenti:

(i) $\mathcal{G}$ è un albero;

(ii) $\mathcal{G}$ è connesso, e $\lambda = n-1$;

Dimostrazione –

$(i) \Rightarrow (ii)$. Un albero è connesso per definizione, dunque resta da dimostrare che un albero con n vertici ha esattamente $n-1$ lati.

Procediamo per induzione su n. Per $n := 1$, l'albero consiste di un solo vertice e zero lati, come si voleva. Supponiamo che (ipotesi di induzione) ogni albero con $n-1$ vertici abbia $n-2$ lati, e sia $\mathcal{G}$ un albero con n vertici e λ lati. Per il teorema 3.2.2, $\mathcal{G}$ ha almeno due foglie; sia $\mathcal{G}_1$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo una foglia e l'unico lato ad essa incidente.

Allora $\mathcal{G}_1$ è un albero (perché sopprimendo una foglia un grafo connesso rimane tale, teorema 2.2.4, e certamente sopprimendo qualsiasi cosa non si introducono cicli), con $n-1$ vertici e $\lambda-1$ lati; per l'ipotesi d'induzione si ha

$$\lambda - 1 = (n-1) - 1$$

da cui immediatamente

$$\lambda = n - 1$$

come si voleva.

$(ii) \Rightarrow (i)$. La (ii) ci assicura che $\mathcal{G}$ è connesso. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{G}$ abbia un ciclo, e sia $\mathcal{G}_1 := (\mathcal{V}, \mathcal{L}^*, \iota^*)$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo una qualsiasi lato di tale ciclo: per il teorema 2.2.5, $\mathcal{G}_1$ è un grafo connesso, e si ha $|\mathcal{V}| = n$ e $|\mathcal{L}^*| = \lambda - 1$; esso ha n vertici e $\lambda - 1$ lati; per il teorema 2.2.6, deve essere

$$\lambda - 1 \geq n - 1$$

ossia $\lambda \geq n$, contro la (ii). Si è così ottenuto un assurdo, e ciò prova che $\mathcal{G}$ non ha cicli, come si voleva.

Teorema 3.2.5

In una foresta con n vertici, λ lati e k componenti connesse, si ha

$$n = \lambda + k\,.$$

Dimostrazione – Siano $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_k$ le componenti connesse della foresta data. Per $i := 1, 2, ..., k$ siano n_i e λ_i rispettivamente il numero di vertici e il numero di lati di $\mathcal{A}_i$. Ricordando l'osservazione 3.1.1 e applicando l'equivalenza tra (i) e (ii) del teorema 3.2.4, si ha

$$n_1 = \lambda_1 + 1\,;$$
$$n_2 = \lambda_2 + 1\,;$$
$$...$$
$$n_k = \lambda_k + 1\,.$$

Sommando membro a membro, e ricordando che $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ e $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, si ha l'asserto.