20 marzo 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di venerdì 20 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Nella prima ora di oggi abbiamo dimostrato il

Teorema 4.2.1

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\ \mathcal{L},\ \iota)$ un grafo con $|\mathcal{V}| = n,\ \ |\mathcal{L}| = \lambda$. Se $\mathcal{G}$ è piano e ha calibro non inferiore a c,

$$\lambda \leq \tfrac{c}{c-2}(n-2).$$

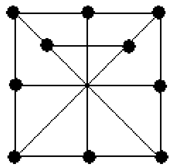
Come conseguenza di questo teorema possiamo capire perché non siamo riusciti a disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati nessuno dei grafi $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$, e $\mathcal{G}_6$ ma soltanto il grafo $\mathcal{G}_5$ (quello ci siete riusciti a disegnarlo senza sovrapposizione di lati, vero?). Tutti questi grafi infatti hanno calibro ≥ 5 (non contengono alcun ciclo di lunghezza inferiore a 5) (di fatto hanno calibro proprio uguale a 5, non è difficile trovare in ciascuno di essi molti cicli di lunghezza 5!) e hanno 10 vertici e 15 lati. Se fossero grafi piani, per il teorema 4.2.1 dovrebbe essere

$$15 \leq \tfrac{5}{5-2}(10-2) = \tfrac{5}{3}8$$

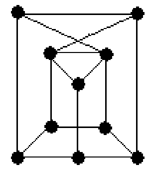
ossia $45 \leq 40$, assurdo.

In realtà (lo ammetto) tutti questi grafi sono isomorfi al grafo di Petersen! E nemmeno il grafo di Petersen, quindi, si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati. Sempre per lo stesso motivo!

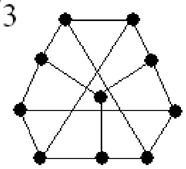
$\mathcal{G}_1$



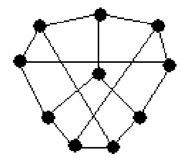
$\mathcal{G}_2$



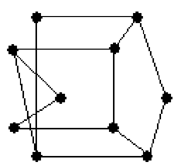
$\mathcal{G}_3$



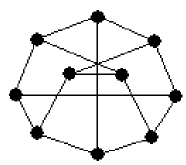
$\mathcal{G}_4$



$\mathcal{G}_5$



$\mathcal{G}_6$



Corollario 4.2.4

Il grafo di Petersen non è piano.

Dimostrazione – Il grafo di Petersen ha calibro 5, 10 vertici e 15 lati. Se fosse un grafo piano, per il teorema 4.2.1 dovrebbe essere

$$15 \leq \tfrac{5}{3}8$$

ossia $45 \leq 40$, assurdo.

È importante capire bene che:

– se la disuguaglianza $\lambda \leq \frac{c}{c-2}(n-2)$ è falsa, allora il grafo non si può certamente disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati,

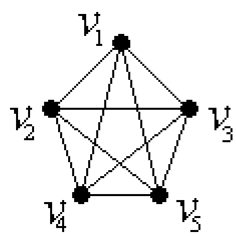
ma

– se la disuguaglianza $\lambda \leq \frac{c}{c-2}(n-2)$ è vera, non abbiamo risolto niente: forse il grafo si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati, ma forse no.

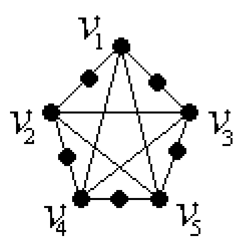
Questo fatto si esprime dicendo che la disuguaglianza $\lambda \leq \frac{c}{c-2}(n-2)$ è condizione ***necessaria ma non sufficiente*** affinché il grafo si possa disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati!

Per convincersi che il verificarsi della disuguaglianza $\lambda \leq \frac{c}{c-2}(n-2)$ non è sufficiente affinché il grafo sia piano, prendiamo il grafo completo $\mathcal{K}_5$ (che come abbiamo visto ***non*** si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati) e pasticciamoci un po' sopra modificandolo in modo che continui a non potersi disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati ***ma*** i valori di λ e n cambino verificando la disuguaglianza in questione.

Il grafo completo $\mathcal{K}_5$ è questo:



Esso ha 5 vertici, 10 lati e calibro 3. Se aggiungiamo un vertice in ciascuno dei cinque lati "esterni", il grafo $\mathcal{G}^*$ così ottenuto non può certamente nemmeno lui essere disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati (da un disegno nel piano di $\mathcal{G}^*$ senza sovrapposizione di lati si ricaverebbe immediatamente un disegno nel piano senza sovrapposizone di lati per $\mathcal{K}_5$!)



Però il grafo così ottenuto ha 10 vertici e 15 lati (il calibro non è ovviamente cambiato): sorpresa! Adesso si ha

$$15 = \lambda \leq \tfrac{c}{c-2}(n-2) = 3 \cdot 8 = 24\,.$$

Con questo trucchetto di aggiungere vertici ai lati (che tecnicamente si chiama "effettuare una *suddivisione* del grafo") il numero dei lati (che sta al primo membro nella disuguaglianza) aumenta di tanto quanto aumenta il numero dei vertici (che sta al secondo membro della disuguaglianza, e viene moltiplicato per $\frac{c}{c-2}$ che è certamente maggiore di uno!).

Si capisce che aggiungendo un numero sufficientemente alto di vertici ai lati (non c’è mica un limite a quanti vertici si possono aggiungere!) qualsiasi grafo si riesce a trasformarlo in un grafo che verifica la disuguaglianza

$$\lambda \leq \tfrac{c}{c-2}(n-2)\,.$$

Ok, adesso tocca dare la definizione, molto formale e se volete anche un po’ scura, di “*suddivisione*” di un grafo.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\, \mathcal{L},\, \iota)$ un grafo. Si dice *suddivisione* di $\mathcal{G}$ qualunque grafo $(\mathcal{V}^\star,\, \mathcal{L}^\star,\, \iota^\star)$ ottenuto da $\mathcal{G}$ applicando un numero finito di volte il seguente procedimento:

$\mathcal{V}^\star := \mathcal{V} \cup \{v_0\}$, $\mathcal{L}^\star := (\mathcal{L} \setminus \{\lambda_0\}) \cup \{\lambda_1,\, \lambda_2\}$, $\iota(\lambda_0) = \{v_1,\, v_2\}$, $\iota^\star(\lambda_1) = \{v_1,\, v_0\}$, $\iota^\star(\lambda_2) = \{v_2,\, v_0\}$.

Al di là dei formalismi, comunque, il procedimento descritto consiste (come ho già detto) nell’eliminare un lato e poi aggiungere un nuovo vertice v_0 e due lati incidenti ciascuno v_0 e, rispettivamente, uno degli estremi del lato eliminato. Se è dato un disegno nel piano di $\mathcal{G}$, un disegno del grafo ottenuto con un’applicazione del procedimento descritto si ottiene utilizzando gli stessi archi di curve semplici piane e semplicemente “evidenziando” un punto che corrisponda al vertice aggiunto: dunque $\mathcal{G}$ è un grafo piano se e soltanto se ogni sua suddivisione è un grafo piano.

In particolare, se $\mathcal{G}$ ha come sottografo una suddivisione di $\boldsymbol{K}_5$ o di $\boldsymbol{K}_{3,3}$, allora $\mathcal{G}$ non è un grafo piano. Il matematico polacco Kazimierz Kuratowski (1896-1980) ha dimostrato che vale anche l’inverso, ottenendo così una significativa (anche se non particolarmente utile da un punto di vista pratico) caratterizzazione dei grafi piani:

Teorema 4.3.1 (Kuratowski)

Un grafo è piano se e soltanto se nessun suo sottografo è (isomorfo a) una suddivisione di $\boldsymbol{K}_5$ o di $\boldsymbol{K}_{3,3}$.

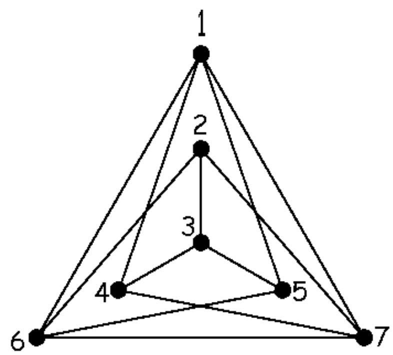
Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

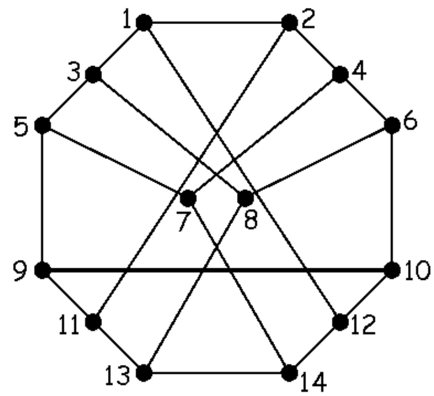
Esercizio 4.3.2

Si trovi un sottografo del grafo di Petersen isomorfo a una suddivisione di $\boldsymbol{K}_5$ o di $\boldsymbol{K}_{3,3}$ (poiché il grafo di Petersen non è piano, come si è visto nel corollario 4.2.4, un tale sottografo deve esistere per il teorema di Kuratowski) .

Concludo questa lezione "virtuale" proponendo un esercizio che non c'è sugli appunti di teoria dei grafi.

Per ciascuno dei due grafi senza orientamento disegnati qui di seguito (il primo ha 7 vertici e 12 lati, il secondo ha 14 vertici e 21 lati) si dica, motivando la risposta, se è un grafo piano.





La soluzione ragionata dell'esercizio ve la darò martedì prossimo 31 marzo. Nel frattempo, visto che dovete stare in casa, studiate!