13 marzo 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di venerdì 13 marzo 2020 (nei giorni 6 e 10 marzo non c’è stata lezione). La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Uno dei possibili utilizzi del concetto di grafo è quello di schematizzare una rete di elementi fra loro collegati: chessò, un *network* di computer, un insieme di città con le strade che portano da una all’altra, un insieme di persone e dei loro contatti reciproci (attraverso i quali, ad esempio, un virus potrebbe trasmettersi). In molti casi se c’è un collegamento questo è reciproco (e in questi casi la schematizzazione avviene mediante grafi senza orientamento), in altri no (ad esempio, le strade di una città che collegano i vari luoghi potrebbero essere a senso unico) (e in questo caso la schematizzazione deve avvenire mediante grafi con orientamento).

È naturale quindi introdurre un concetto che descriva l’idea di “muoversi fra i vari vertici di un grafo lungo i lati” e questo concetto consente poi di precisare varie idee intuitive (quella ad esempio di “*cluster*”, nel quale se tutti sono sani non può avvenire trasmissione del virus perché c’è una sorta di “isolamento”... il termine tecnico per “*cluster*” è, come vedremo “*componente connessa*”).

Veniamo dunque alla prima, più generale, definizione, che poi preciseremo imponendo condizioni via via più restrittive (questa idea delle condizioni ogni giorno più restrittive non dovrebbe suonarvi nuova!).

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo.

Si dice *passeggiata* (in inglese: *walk*) in $\mathcal{G}$ una sequenza finita

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, v_3, ..., \ell_s, v_s$$

nella quale $s \geq 1$, $v_0, v_1, v_2, ..., v_s \in \mathcal{V}$, $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_s \in \mathcal{L}$ e $\iota(\ell_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ (se $\mathcal{G}$ è senza orientamento) oppure $\iota(\ell_i) = (v_{i-1}, v_i)$ (se $\mathcal{G}$ è con orientamento) per $i := 1, 2, ..., s$.

Notate che non basta specificare (sia pure nell’ordine) i vertici coinvolti, ma bisogna precisare anche i lati (che ovviamente devono essere incidenti sia il vertice precedente sia quello seguente, e se il grafo è con orientamente devono essere incidenti ***in quest’ordine*** sia il vertice precedente sia quello seguente!). Certo, se il grafo è semplice (cioè non ci sono lati paralleli, quindi non c’è ambiguità sulla scelta del collegamento fra due vertici della passeggiata) questa informazione è sovrabbondante, ma... *melius abundare quam deficere*!

I vertici v_0 e v_s si dicono gli *estremi* della passeggiata. Se $v_s = v_0$, la passeggiata si dice chiusa.

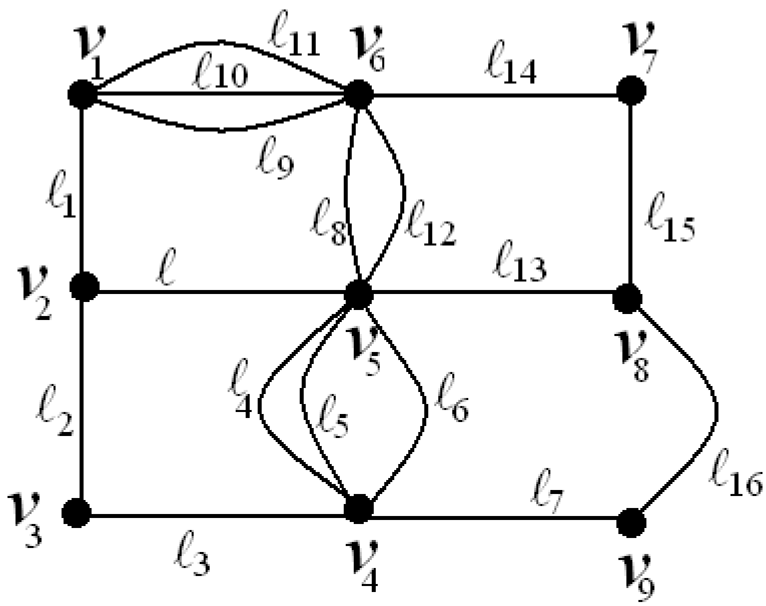
Il numero naturale s si dice *lunghezza* della passeggiata.

Adesso cominciamo a definire concetti via via più restrittivi.

Una passeggiata in cui i lati sono tutti distinti si dice *cammino* (in inglese: *trail*). Un cammino chiuso nel quale compare almeno un lato si dice *circuito* (in inglese: *circuit*). In un cammino non solo non si può andare avanti e indietro fra due vertici (come invece si può fare *ad libitum* in una passeggiata) ma si ripassa mai dallo stesso lato!

Una passeggiata in cui i vertici e i lati sono tutti distinti (fatta comunque salva la possibilità che gli estremi coincidano) si dice *cammino semplice* (in inglese: *path*). Un cammino semplice chiuso si dice *circuito semplice* oppure *ciclo* (in inglese: *cycle*).

Facciamo qualche esempio sul grafo disegnato nel piano che vedete qua sotto:



La sequenza finita

$$v_1,\, \ell_1,\, v_2,\, \ell,\, v_5,\, \ell,\, v_2,\, \ell_2,\, v_3$$

è una passeggiata di estremi v_1 e v_3 ma non è un cammino (perché il lato ℓ compare due volte).

La sequenza finita

$$v_1,\, \ell_1,\, v_2,\, \ell,\, v_5,\, \ell_4,\, v_2,\, \ell_2,\, v_3$$

non è una passeggiata (perché ℓ_4 pur essendo incidente a v_5 non è incidente a v_2).

La sequenza finita

$$v_1,\, \ell_1,\, v_2,\, \ell,\, v_5,\, \ell_8,\, v_6,\, \ell_{14},\, v_7,\, \ell_{14},\, v_6,\, \ell_{10},\, v_1$$

è una passeggiata chiusa ma non è un circuito (cioè un cammino chiuso) (perché il lato ℓ_{14} compare due volte).

La sequenza finita

$$v_1,\, \ell_1,\, v_2,\, \ell,\, v_5,\, \ell_4,\, v_4,\, \ell_7,\, v_9,\, \ell_{16},\, v_8,\, \ell_{13},\, v_5,\, \ell_8,\, v_6$$

è un cammino (e quindi anche una passeggiata) di estremi v_1 e v_6 ma non è un cammino semplice (perché il vertice v_5 compare due volte).

La sequenza finita

$$v_1,\, \ell_9,\, v_6,\, \ell_8,\, v_5,\, \ell_{13},\, v_8,\, \ell_{16},\, v_9,\, \ell_7,\, v_4,\, \ell_4,\, v_5,\, \ell,\, v_2,\, \ell_1,\, v_1$$

è un circuito (cioè un cammino chiuso, e quindi anche una passeggiata chiusa) ma non è un ciclo (perché il vertice v_5 compare due volte).

Osservazione 2.1.1

Una passeggiata che non sia della forma

$$v, \ell, w, \ell, v$$

se ha i vertici tutti distinti (fatta comunque salva la possibilità che gli estremi coincidano) è un cammino semplice.

Dimostrazione – Sia

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, ..., v_{i-1}, \ell_i, v_i, ..., v_{j-1}, \ell_j, v_j, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_s = w$$

una passeggiata con i vertici tutti distinti (tranne la possibilità che sia $v = w$). Se fosse $\ell_i = \ell_j$ con $0 \le i < j \le s$, dovrebbe essere $v_{i-1} = v_{j-1}$ (ma questo è impossibile perché per ipotesi i vertici sono tutti distinti) oppure $v_i = v_{j-1}$ e $v_{i-1} = v_j$; questo è compatibile con la nostra ipotesi (che i vertici siano tutti distinti, tranne eventualmente gli estremi della passeggiata) solo se $i = 1$ e $j = 2 = s$, cioè se la nostra passeggiata è della forma v, ℓ, w, ℓ, v.

Teorema 2.1.2

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo. Siano $v, w \in \mathcal{V}$ con $v \ne w$, e supponiamo che esista in $\mathcal{G}$ una passeggiata di estremi v e w.

Una passeggiata in $\mathcal{G}$ che abbia lunghezza minima fra tutte quelle di estremi v e w è un cammino semplice (di estremi v e w).

Dimostrazione – Sia *P*

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., \ell_i, v_i, \ell_{i+1}, ..., \ell_j, v_j, \ell_{j+1}, ..., \ell_s, v_s = w$$

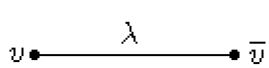
una passeggiata che abbia lunghezza minima fra tutte quelle di estremi v e w. Supponiamo per assurdo che *P* non sia un cammino semplice, cioè (tenendo conto dell’osservazione 2.1.1 e dell’ipotesi $v \ne w$) che sia $v_i = v_j$ per una scelta opportuna di i e j tra 0 e s (con, per fissare le idee, $i < j$). Allora, poiché per ipotesi non può essere sia $i = 0$ sia $j = s$,

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., \ell_i, v_i = v_j, \ell_{j+1}, ..., \ell_s, v_s = w$$

sarebbe una passeggiata di estremi v e w avente lunghezza $s - (j - i)$ con $0 < s - (j - i) < s$, assurdo per come abbiamo scelto *P*.

Osservazione 2.1.3

Il teorema 2.1.2 non si può estendere al caso in cui $v = w$: infatti nel grafo seguente



c’è la passeggiata chiusa $v, \ell, \overline{v}, \ell, v$ ma non ci sono circuiti.

Teorema 2.1.4

Sia $v \in \mathcal{V}$. Un circuito in $\mathcal{G}$ che abbia lunghezza minima fra tutti quelli passanti per v è un ciclo.

Dimostrazione – Sia *C*

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_s = v$$

un circuito che abbia lunghezza minima fra tutti quelli passanti per v. Se $v_{s-1} = v$, per la minimalità di *C* deve essere $s = 1$, cosicché ℓ_1 è un cappio e *C* è un ciclo, come si voleva. Se invece $v_{s-1} \neq v$, il cammino

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{s-1}$$

è una passeggiata di lunghezza minima (per la minimalità di *C*) fra gli estremi distinti v e v_{s-1}, quindi (per il teorema 2.1.2) è un cammino semplice; in particolare, anche v_1, v_2, ..., v_{s-2} sono distinti fra loro, da v e da v_{s-1}. Ciò prova che *C* è un ciclo, come si voleva.

Adesso introduciamo l'idea di *connessione*: in un grafo senza orientamento, due vertici distinti v e w si dicono *connessi* se esiste una passeggiata che li ha per estremi; in questo caso, c'è anche una cammino semplice che li ha per estremi, e la lunghezza del cammino semplice di lunghezza minima (!) fra tutti quelli che hanno per estremi v e w si dice la distanza fra v e w. Non è un concetto complicato, ma per fare le cose per bene ci vuole qualche definizione pignoletta.

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento.

Siano P_1

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, v_3, ..., \ell_s, v_s = \overline{v}$$

una passeggiata di estremi v e $\overline{v}$, e P_2

$$\overline{v} = v'_0, \ell'_1, v'_1, \ell'_2, v'_2, \ell'_3, v'_3, ..., \ell'_s, v'_s = \overline{\overline{v}}$$

una passeggiata di estremi $\overline{v}$ e $\overline{\overline{v}}$.

Indicheremo con P_1^{-1} (e chiameremo *passeggiata inversa* di P_1) la passeggiata

$$\overline{v} = v_s, \ell_s, v_{s-1}, \ell_{s-1}, v_{s-2}, ..., \ell_2, v_1, \ell_1, v_0 = v$$

di estremi $\overline{v}$ e v (tale passeggiata esiste perché $\mathcal{G}$ è senza orientamento).

Indicheremo con $P_1 + P_2$ (e chiameremo *passeggiata somma* di P_1 *e* P_2) la passeggiata

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., \ell_s, v_s = \overline{v} = v'_0, \ell'_1, v'_1, \ell'_2, v'_2, ..., \ell'_s, v'_s = \overline{\overline{v}}$$

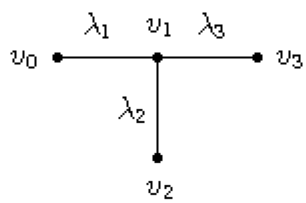
di estremi v e $\overline{\overline{v}}$.

Si noti che la somma così definita <u>non</u> è un’operazione nell’insieme delle passeggiate in $\mathcal{G}$: si può fare la somma di due passeggiate, infatti, soltanto se il secondo estremo della prima coincide col primo estremo della seconda.

Osservazione 2.2.1

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento. L’inverso di un cammino [semplice] di $\mathcal{G}$ è anch’esso un cammino [semplice] di $\mathcal{G}$. La somma di due cammini (anche se semplici) di $\mathcal{G}$ non è in generale un cammino di $\mathcal{G}$.

Dimostrazione – Sia P una passeggiata: poiché P^{-1} ha gli stessi vertici e gli stessi lati di P, se P è un cammino [semplice] anche P^{-1} lo è. Per convincersi che in generale la somma di due cammini (anche semplici) non è un cammino, si consideri il seguente grafo $\mathcal{G}$:



La somma tra il cammino semplice $C_1 := v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2$ e il cammino semplice $C_2 := v_2, \ell_2, v_1, \ell_3, v_3$ è una passeggiata ma non un cammino.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo senza orientamento. Due vertici $v, w \in \mathcal{V}$ si dicono connessi (in $\mathcal{G}$) se esiste (almeno) una passeggiata di estremi v e w, oppure se $v = w$ (cosicché anche i vertici di grado zero sono connessi a se stessi).

Osservazione 2.2.2

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo senza orientamento. Due vertici $v, w \in \mathcal{V}$ con $v \neq w$ sono connessi (in $\mathcal{G}$) se e soltanto se esiste in $\mathcal{G}$ un cammino semplice di estremi v e w.

Dimostrazione – Poiché un cammino semplice è una particolare passeggiata, è chiaro che se esiste in $\mathcal{G}$ un cammino semplice di estremi v e w allora v e w sono connessi in $\mathcal{G}$. Viceversa, supponiamo che v e w siano connessi in $\mathcal{G}$ e che sia $v \neq w$: allora esistono in $\mathcal{G}$ passeggiate di estremi v e w; scegliendone una di lunghezza minima abbiamo, per il teorema 2.1.2, un cammino semplice di estremi v e w.

Un grafo senza orientamento si dice *connesso* se comunque presi due suoi vertici essi sono connessi. Un grafo con orientamento si dice connesso se il suo sostegno (cfr. sez. 1.2) è connesso.

Non è sorprendente scoprire che l’esistenza di lati paralleli e/o cappi è irrilevante per decidere se un grafo è connesso o no (infatti se v e w sono vertici distinti a noi interessa solo sapere se c’è un modo per “andare da v a w”, se di strade ce ne sono tante o poche non cambia niente!)

Teorema 2.2.3

Un grafo è connesso se e soltanto se il suo sostegno è connesso.

Dimostrazione – Se $\mathcal{G}$ è un grafo con orientamento, l’asserto si limita a ripetere la definizione di “grafo connesso”, quindi possiamo supporre che $\mathcal{G}$ sia un grafo senza orientamento.

Supponiamo che il sostegno di $\mathcal{G}$ sia connesso. Siano u, v vertici di $\mathcal{G}$; per ipotesi, nel sostegno di $\mathcal{G}$ c’è una passeggiata di estremi u e v; poiché ogni lato del sostegno di $\mathcal{G}$ è (identificabile con un opportuno) lato di $\mathcal{G}$, tale passeggiata esiste anche in $\mathcal{G}$, dunque (per l’arbitrarietà di u e v) $\mathcal{G}$ è connesso.

Supponiamo infine che $\mathcal{G}$ sia connesso. Siano u, v vertici del sostegno di $\mathcal{G}$; essi sono anche vertici di $\mathcal{G}$ e, per ipotesi, in $\mathcal{G}$ c’è una passeggiata di estremi u e v; eliminando in tale passeggiata gli eventuali cappi e sostituendo, se necessario, a un lato quello ad esso parallelo che appartiene al sostegno di $\mathcal{G}$, da tale passeggiata di estremi u e v si ottiene una passeggiata nel sostegno di $\mathcal{G}$ ancora di estremi u e v; dunque (per l’arbitrarietà di u e v) il sostegno di $\mathcal{G}$ è connesso.

Il seguente teorema è utile in più occasioni, ad esempio serve nella dimostrazione del teorema 2.2.6.

Teorema 2.2.4

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso. Se $\mathcal{G}$ ha una foglia $\overline{v}$, il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo $\overline{v}$ (e l’unico lato di $\mathcal{G}$ incidente con $\overline{v}$) è connesso.

Dimostrazione – Per il teorema 2.2.3, possiamo supporre che $\mathcal{G}$ sia un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi.

Sia $\mathcal{G}_1$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo $\overline{v}$ (e l'unico lato di $\mathcal{G}$ incidente con $\overline{v}$) e siano v, w due vertici di $\mathcal{G}_1$: dobbiamo dimostrare che v e w sono connessi in $\mathcal{G}_1$. Poiché $\mathcal{G}_1$ è un sottografo di $\mathcal{G}$, v e w sono anche vertici di $\mathcal{G}$; poiché $\mathcal{G}$ è connesso, v e w sono connessi in $\mathcal{G}$ e quindi (osservazione 2.2.2) in $\mathcal{G}$ esiste un cammino semplice

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_s = w$$

di estremi v e w. Ma non può essere $\overline{v} = v_i$ per nessun i compreso tra 1 e $s - 1$: infatti, essendo $\overline{v}$ una foglia, c'è un solo lato incidente con $\overline{v}$ e se fosse $\overline{v} = v_i$ questo lato dovrebbe coincidere sia con ℓ_i sia con ℓ_{i+1} , assurdo perché in un cammino non può comparire due volte lo stesso lato. Dunque C è di fatto un cammino in $\mathcal{G}_1$, e si è così provato che v e w sono connessi in $\mathcal{G}_1$, come si voleva.

Il prossimo teorema servirà più avanti, quindi in prima lettura potete saltarlo e passare subito al teorema 2.2.6.

$\boxed{\text{Teorema 2.2.5}}$

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso. Se in $\mathcal{G}$ c'è un ciclo, ciascun grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo un qualsiasi lato del ciclo è un grafo connesso.

Dimostrazione – Per il teorema 2.2.3, possiamo supporre che $\mathcal{G}$ sia un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi. Sia

$$\overline{v} = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{i-1}, \ell_i, v_i, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_s = \overline{v}$$

un ciclo di $\mathcal{G}$. Sia $\mathcal{G}_1$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo ℓ_i, e proviamo che comunque presi due vertici v e w di $\mathcal{G}_1$ essi sono connessi in $\mathcal{G}_1$. Poiché $\mathcal{G}_1$ è un sottografo di $\mathcal{G}$, v e w sono anche vertici di $\mathcal{G}$; poiché $\mathcal{G}$ è connesso, v e w sono connessi in $\mathcal{G}$ e quindi (osservazione 2.2.2) in $\mathcal{G}$ esiste un cammino semplice C_0 di estremi v e w. Se ogni lato di C_0 è diverso da ℓ_i, C_0 è anche un cammino di $\mathcal{G}_1$; in caso contrario è $C_0 = C_1 + C_2 + C_3$ dove

– C_1 è un cammino semplice di estremi v e v_{i-1} (oppure v e v_i), costituito dai vertici e lati che si susseguono in C_0 fino a ℓ_i escluso;

– C_2 è il cammino semplice v_{i-1}, ℓ_i, v_i (oppure v_i, ℓ_i, v_{i-1});

– C_3 è un cammino semplice di estremi v_{i-1} e w (oppure v_i e w), costituito dai vertici e lati che si susseguono in C_0 a partire dal vertice che segue ℓ_i .

Indichiamo con C'_2 il cammino semplice che si ottiene "percorrendo" il ciclo dato da v_{i-1} a v_i senza passare per ℓ_i, cioè

$$v_{i-1}, \ell_{i-1}, v_{i-2}, ..., v_1, \ell_1, \overline{v}, \ell_s, v_{s-1}, \ell_{s-1}, v_{s-2}, ..., v_{i+1}, \ell_{i+1}, v_i .$$

Allora $C_1 + C'_2 + C_3$ (oppure $C_1 + (C'_2)^{-1} + C_3$) è una passeggiata in $\mathcal{G}_1$ di estremi v e w: pertanto v e w sono connessi in $\mathcal{G}_1$ e la dimostrazione è completata.

Affinché un grafo sia connesso, ci vuole un minimo di lati! Precisamente, ci vogliono almeno tanti lati quanti sono i vertici (meno uno). ***Attenzione!*** Questa è una condizione ***necessaria, ma non sufficiente*** affinché un grafo sia connesso (cioè: se la condizione non è verificata, potete essere certi che il grafo non è connesso; ma se la condizione è verificata, chissà, magari il grafo non è comunque connesso, perché i lati sono “disposti male”...). Vediamo adesso l’enunciato preciso e la (facile) dimostrazione.

Teorema 2.2.6

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$, con $|\mathcal{V}| = n$ e $|\mathcal{L}| = \lambda$. Se $\mathcal{G}$ è connesso,

$$\lambda \geq n - 1\,.$$

Dimostrazione – Per il teorema 2.2.3, e poiché il numero dei lati di un grafo non è inferiore a quello del suo sostegno, basterà dimostrare l’asserto per il sostegno di $\mathcal{G}$, ossia supporre che $\mathcal{G}$ sia un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi.

Poiché l’asserto è banalmente vero se $\mathcal{G}$ ha un solo vertice, possiamo procedere per induzione sul numero dei vertici di $\mathcal{G}$. Supponiamo dunque che il teorema sia vero per tutti i grafi con $n_0 - 1$ vertici, e proviamo che è vero anche per ogni grafo con n_0 vertici. Sia $\mathcal{G}_0$ un grafo connesso con λ_0 lati e n_0 vertici. Se ogni vertice di $\mathcal{G}$ ha grado almeno 2, è addirittura $\lambda_0 \geq n_0$ in base al teorema 1.3.4; in caso contrario, c’è almeno una foglia $\overline{v}$ (infatti, poiché $\mathcal{G}$ è connesso, non ci possono essere vertici di grado zero).

Per il teorema 2.2.4, il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo $\overline{v}$ (e l’unico lato di $\mathcal{G}$ incidente con $\overline{v}$) è ancora connesso, ed ha $n_0 - 1$ vertici e $\lambda_0 - 1$ lati; applicando ad esso l’ipotesi di induzione, si ottiene che $\lambda_0 - 1 \geq (n_0 - 1) - 1$ da cui $\lambda_0 \geq n_0 - 1$ come si voleva.

Concludiamo questa lezione col concetto di “componente connessa”, per introdurre il quale dobbiamo rispolverare l’idea di “relazione di equivalenza”.

Teorema 2.2.7

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo senza orientamento. La relazione $\sim$ in $\mathcal{V}$ definita da

$$v \sim w \Leftrightarrow v \text{ e } w \text{ sono connessi in } \mathcal{G}$$

è una relazione di equivalenza in $\mathcal{G}$.

Dimostrazione – La $\sim$ è riflessiva per definizione; è simmetrica perché l’inversa di una passeggiata è una passeggiata; ed è transitiva perché la somma di due passeggiate è una passeggiata.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo. Si dice *sottografo* di $\mathcal{G}$ un grafo $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0, \iota_0)$ tale che $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ e ι_0 è la restrizione di ι a $\mathcal{L}_0$.

Parliamo cioè di “sottografo” di $\mathcal{G}$ quando scegliamo alcuni fra i vertici e i lati di $\mathcal{G}$, con una importantissima condizione: mentre la scelta dei vertici è assolutamente libera (ne potete prendere un solo, oppure la metà, oppure tutti meno ventisette...) i lati che scegliete ***devono*** essere incidenti in $\mathcal{G}$ a vertici che avete scelto.

$\boxed{\text{Osservazione 1.10.1}}$

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo. Per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, si ottiene un sottografo di $\mathcal{G}$ sopprimendo ℓ dall'insieme dei lati di $\mathcal{G}$; per ogni $v \in \mathcal{V}$, si ottiene un sottografo di $\mathcal{G}$ sopprimendo v dall'insieme dei vertici di $\mathcal{G}$ e contestualmente tutti i lati incidenti a v dall'insieme dei lati di $\mathcal{G}$.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo, e sia $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$. Si dice *sottografo di $\mathcal{G}$ indotto da $\mathcal{X}$* il grafo $(\mathcal{X}, \mathcal{L}_0, \iota_0)$ dove $\mathcal{L}_0$ è l'insieme di tutti i lati di $\mathcal{G}$ incidenti soltanto a vertici di $\mathcal{X}$ (e ι_0 è la restrizione di ι a $\mathcal{L}_0$).

Siano $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo e $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0, \iota_0)$ un sottografo di $\mathcal{G}$. Si dice *sottografo di $\mathcal{G}$ indotto da $\mathcal{G}_0$* il sottografo di $\mathcal{G}$ indotto da $\mathcal{V}_0$.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo. Un sottografo $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0, \iota_0)$ di $\mathcal{G}$ si dice *indotto* (tout-court) se è il sottografo di $\mathcal{G}$ indotto da $\mathcal{V}_0$.

Ok, adesso possiamo tornare alla relazione $\sim$ introdotta col teorema 2.2.7.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ un grafo, e sia $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}, \mathcal{L}_0, \iota_0)$ il suo sostegno. I sottografi di $\mathcal{G}$ indotti dalle classi di equivalenza in cui si ripartisce $\mathcal{V}$ rispetto alla relazione $\sim$ considerata nel teorema 2.2.7 per $\mathcal{G}_0$ si dicono *componenti connesse* di $\mathcal{G}$.

$\boxed{\text{Teorema 2.2.8}}$

Sia $\mathcal{G}$ un grafo. Ogni componente connessa di $\mathcal{G}$ è un sottografo connesso di $\mathcal{G}$. Ogni sottografo di $\mathcal{G}$ di cui una componente connessa sia sottografo proprio non è connesso.

Il contenuto del teorema 2.2.8 si usa esprimere dicendo che: le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali.

Insomma, l’avrei detto a lezione ma in tempi normali non l’avrei mai scritto perché è un’espressione grossolana anche se rende l’idea: le componenti connesse sono i “pezzi” di cui è composto il grafo; due vertici che appartengono a una stessa componente connessa sono connessi (appunto...) cioè esiste un cammino (semplice, se vogliamo!) che li ha per estremi. Se uno dei due è infetto da COVID-19, può trasmettere il virus all’altro! Se invece v e w appartengono a due diverse componenti connesse, non esiste cammino (né passeggiata) che abbia per estremi v e w. Se nella componente connessa a cui appartiene v tutti gli altri vertici sono negativi al COVID-19, v *non può ammalarsi*! (È protetto dalla cosiddetta *immunità di gregge*).

L’ultimo argomento di oggi è strettamente legato a quanto visto finora ma ci servirà solo fra qualche settimana, quindi al momento potete saltarlo...

Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Un grafo si dice $k -$ *connesso* se, comunque scelti $k-1$ suoi vertici, il grafo ottenuto sopprimendo tali vertici (e, ovviamente, tutti i lati ad essi incidenti) è connesso. Ovviamente, un grafo è $1 -$ connesso se e soltanto se è connesso. Più avanti (capitolo 6) ci farà comodo il seguente risultato, la cui dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella del teorema 2.2.5:

Teorema 2.2.9

Sia $\mathcal{G}$ un grafo. Se $\mathcal{G}$ è indotto da un suo sottografo ciclico, allora $\mathcal{G}$ è $2 -$ connesso.

Dimostrazione – Sia C_0

$$\overline{v} = v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{i-1}, \ell_i, v_i, \ell_{i+1}, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_n = \overline{v}$$

il ciclo che induce $\mathcal{G}$. Dobbiamo dimostrare che il grafo $\mathcal{G}_0$ ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo v_i (e tutti i lati ad esso incidenti) è connesso, cioè che presi comunque due vertici v, w di $\mathcal{G}_0$ esiste in $\mathcal{G}_0$ un cammino di estremi v e w. Per ipotesi, nel ciclo C_0 compaiono tutti i vertici di $\mathcal{G}$, dunque sarà $v = v_h$ e $w = v_k$ per certi numeri naturali h, k compresi tra 1 e n (ma diversi da i).

Se h, k sono entrambi minori di i (o entrambi maggiori di i), un cammino in $\mathcal{G}_0$ di estremi v_h e v_k si “legge” direttamente in quel che resta di C_0 dopo la soppressione di v_i (e di tutti i lati ad esso incidenti); se invece (ad esempio) h è minore di i mentre k è maggiore di i, per trovare in $\mathcal{G}_0$ un cammino di estremi v_h e v_k basta percorrere “a ritroso” C_0 da v_h a $\overline{v}$ e poi ancora da $\overline{v}$ a v_k.