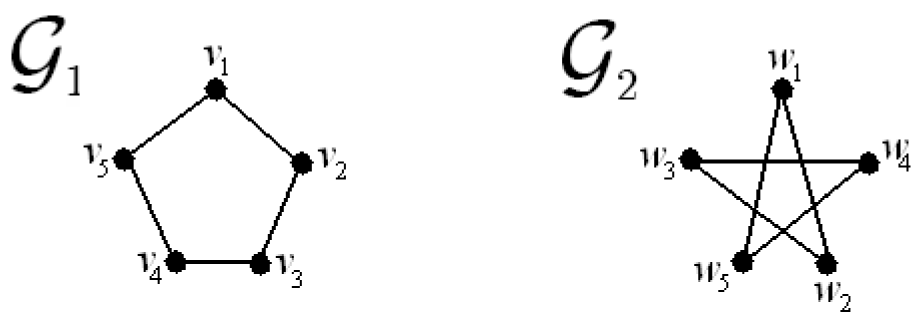
20 marzo 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di venerdì 20 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Abbiamo già osservato che questi due grafi disegnati nel piano sono isomorfi:



Osserviamo adesso che il grafo $\mathcal{G}_1$ possiede una (interessante!) proprietà che il grafo $\mathcal{G}_2$ ***non*** possiede: due lati qualsiasi di $\mathcal{G}_1$ non hanno punti in comune che non siano vertici.

Questa lezione, assieme alla prossima, sarà dedicata a capire se riusciamo a individuare quei grafi (come $\mathcal{G}_2$) che sono isomorfi ad altri grafi disegnati nel piano con la proprietà che due lati qualsiasi non hanno punti in comune che non siano vertici. Ok, avete capito che è pesante dover ripetere ogni volta questa tiritera e dunque provvediamo a un paio di belle definizioni (ma sono “quasi” le uniche che introdurremo) per poterci esprimere in modo più sintetico.

Un grafo $\mathcal{G}$ disegnato nel piano (cfr. sez. 1.8) si dice *senza sovrapposizione di lati* se comunque presi due lati di $\mathcal{G}$ la loro intersezione è vuota o consiste in alcuni dei loro estremi. Un grafo si dice *piano* (o *planare*) se è isomorfo a un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati.

Se un grafo $\mathcal{G}$ è isomorfo a un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati si dice anche che $\mathcal{G}$ ***si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati***.

Teorema 4.1.1

Un grafo è piano se e soltanto se il suo sostegno (cfr. sez. 1.2 degli appunti di teoria dei grafi) è piano.

Dimostrazione – Sia $\mathcal{G}$ un grafo piano, e sia $\mathcal{G}_0$ un disegno di $\mathcal{G}$ nel piano senza sovrapposizione di lati. Un disegno nel piano del sostegno di $\mathcal{G}$ si ottiene in modo ovvio da $\mathcal{G}_0$ eliminando alcuni lati, e quindi tale disegno è ancora senza sovrapposizione di lati.

Viceversa, sia $\mathcal{G}$ un grafo il cui sostegno $\overline{\mathcal{G}}$ è piano; allora esiste un disegno $\overline{\mathcal{G}}_0$ di $\overline{\mathcal{G}}$ nel piano senza sovrapposizione di lati. Un disegno di $\mathcal{G}$ nel piano si può ottenere da $\overline{\mathcal{G}}_0$ aggiungendo eventualmente lati paralleli a lati già esistenti e/o cappi e/o assegnando un orientamento a tutti i lati coì disegnati: poiché le linee non hanno spessore, ciascuna di queste aggiunte può avvenire senza creare sovrapposizione di lati. Dunque anche $\mathcal{G}$ è un grafo piano.

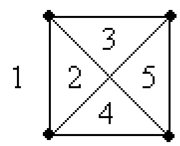
Per il teor. 4.1.1, per discutere questioni di planarità sarà sufficiente limitarci a considerare grafi senza orientamento, semplici e privi di cappi.

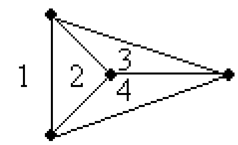
Teorema 4.1.2

Ogni albero è un grafo piano.

Dimostrazione – Dimostriamo il teorema per gli alberi finiti (ma è vero anche per gli alberi nei quali la cardinalità dell’insieme dei vertici e dell’insieme dei lati non è superiore ad $\aleph_0$ (riguardatevi il capitolo 12 degli appunti di algebra!). Procederemo per induzione sul numero n dei vertici. Se $n = 1$, l’asserto è ovvio. Supposto vero il teorema per tutti gli alberi con $n - 1$ vertici, sia $\mathcal{A}$ un albero con n (> 1) vertici. Per il teorema 3.2.2, $\mathcal{A}$ ha almeno due foglie: sia $\mathcal{A}^\star$ l’albero ottenuto da $\mathcal{A}$ sopprimendo una foglia; per l’ipotesi di induzione esiste un grafo $\mathcal{G}^\star$ disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati isomorfo ad $\mathcal{A}^\star$, e $\mathcal{G}^\star$ può certamente essere completato (aggiungendo un segmento opportunamente piccolo) in modo da ottenere un grafo $\mathcal{G}$ disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati isomorfo ad $\mathcal{A}$.

Sia $\mathcal{G}$ un grafo disegnato nel piano, e sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei punti del piano. Gli elementi di $\mathcal{P}$ che appartengono ai lati di $\mathcal{G}$ delimitano in modo ovvio alcuni sottoinsiemi di $\mathcal{P}$ che si dicono *facce* di $\mathcal{G}$. In generale, il numero delle facce di un grafo dipende dal particolare disegno nel piano che stiamo considerando; ecco due disegni nel piano di $\mathcal{K}_4$ che hanno rispettivamente 5 e 4 facce (non si dimentichi la faccia illimitata, detta *esterna*!):





Però se un grafo è disegnato nel piano <u>senza sovrapposizione di lati</u> il *numero* delle facce non dipende dal particolare disegno che stiamo considerando ma soltanto dal numero dei suoi vertici e dal numero dei suoi lati. Esaminiamo in primo luogo la situazione per i grafi ***connessi***:

Teorema 4.1.3 ("formula di Euler")

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\, \mathcal{L},\, \iota)$ un grafo connesso con $|\mathcal{V}| = n,\ |\mathcal{L}| = \lambda$. Se $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati con f facce, si ha

4.1.F1 $$n - \lambda + f = 2\,.$$

Dimostrazione – Procediamo per induzione sul numero λ dei lati di $\mathcal{G}$. Se $\lambda = 0$, $\mathcal{G}$ consiste di un solo vertice: dunque $n = 1$, $\lambda = 0$ e $f = 1$, cosicché vale la 4.1.F1 . Supponiamo (ipotesi di induzione) che la 4.1.F1 valga per tutti i grafi piani connessi con $\lambda - 1$ lati.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\, \mathcal{L},\, \iota)$ un grafo piano connesso con $|\mathcal{V}| = n,\ |\mathcal{L}| = \lambda$. Se $\mathcal{G}$ è un albero, $f = 1$ e (per il teorema 3.2.4) $\lambda = n - 1$, cosicché $n - \lambda + f = n - (n-1) + 1 = 2$ e quindi vale la 4.1.F1. Se $\mathcal{G}$ non è un albero, in $\mathcal{G}$ esiste un ciclo; sia $\mathcal{G}_1$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ togliendo un lato da tale ciclo. Allora $\mathcal{G}_1$ ha n vertici, $\lambda - 1$ lati e $f - 1$ facce (perché togliendo un lato da un ciclo la faccia "interna" e la faccia "esterna" individuate da tale ciclo si fondono in una faccia sola); poiché per l'ipotesi d'induzione la 4.1.F1 vale per $\mathcal{G}_1$, si ha
$$n - (\lambda - 1) + (f - 1) = 2$$
ossia
$$n - \lambda + f = 2$$
come si voleva.

Più in generale, vale il seguente risultato:

Corollario 4.1.4

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\ \mathcal{L},\ \iota)$ un grafo con $|\mathcal{V}| = n,\ \ |\mathcal{L}| = \lambda$. Se $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano con f facce e k componenti connesse, si ha

4.1.F2
$$n - \lambda + f = k + 1\,.$$

Dimostrazione – Per ciascuna componente connessa $\mathcal{G}_i$ di $\mathcal{G}$, siano n_i il numero dei vertici, λ_i il numero dei lati e f_i il numero delle facce. Per il teorema 4.1.3 si ha

$$n_i - \lambda_i + f_i = 2 \qquad \text{per } i := 1, ..., k$$

e quindi

(*)
$$\sum_{i=1}^{k}(n_i - \lambda_i + f_i) = 2k\,.$$

Si ha

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \lambda$$

mentre

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f + (k-1)$$

perché la "faccia esterna" viene conteggiata k volte anziché una sola. Dalla (*) si ricava dunque che

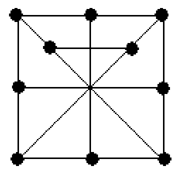
$$2k = \sum_{i=1}^{k}(n_i - \lambda_i + f_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{i=1}^{k} f_i = n - \lambda + f + k - 1\,.$$

da cui subito la 4.1.F2 .

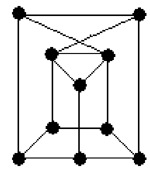
Tutto questo, come si è detto, funziona bene se il nostro grafo è già disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati. Ma il problema che vogliamo affrontare è in effetti diverso: ci chiediamo infatti, dato un grafo $\mathcal{G}$, se $\mathcal{G}$ si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati.

Certamente possiamo fare dei tentativi: ridisegniamo un lato spostandolo un po', ne ridisegniamo un altro, spostiamo anche qualche vertice magari... Forse siamo fortunati e otteniamo un grafo (che, ricordiamolo!, deve rigorosamente ***essere isomorfo*** a quello da cui siamo partiti!) senza sovrapposizione di lati. O forse invece, per quanti tentativi facciamo, non riusciamo proprio a disegnare il nostro grafo senza che qualche lato si sovrapponga! Ma ciò avviene perché siamo imbranati noi, o perché è proprio impossibile? Provate un po' con questi grafi, quanti e quali di essi riuscite a disegnare senza sovrapposizione di lati? Scrivetemi!

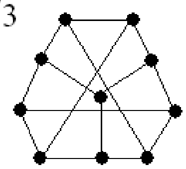
$\mathcal{G}_1$



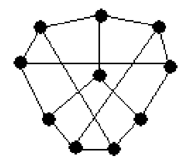
$\mathcal{G}_2$



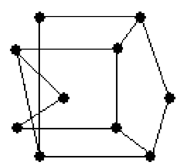
$\mathcal{G}_3$



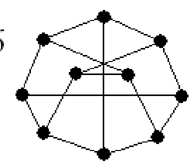
$\mathcal{G}_4$



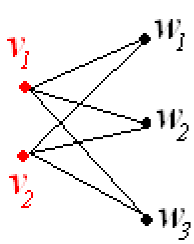
$\mathcal{G}_5$

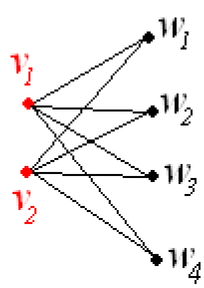


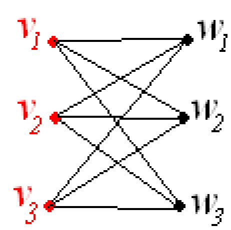
$\mathcal{G}_6$



E che cosa riuscite a fare con i grafi $\mathcal{K}_{2,3}$, $\mathcal{K}_{2,4}$ e $\mathcal{K}_{3,3}$?







Non dovreste andare avanti a leggere prima di avere fatto un po' di esperimenti con i grafi sopra riportati.

Spoiler alert: se andate avanti a leggere scoprite chi è l'assassino (cioè quali dei grafi sopra disegnati sono piani (= sono isomorfi a grafi disegnati nel piano senza sovrapposizione di lati).

Avete capito bene?

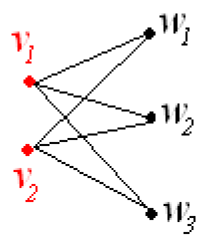
Se andate avanti a leggere, poi non potete più giocare coi grafi sopra disegnati!

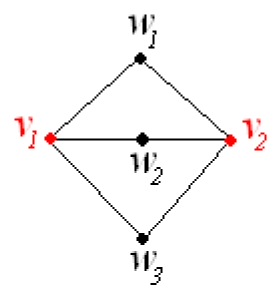
Va beh, ora che siete consapevoli del rischio, andate pure avanti a leggere, se volete!

Allora, la situazione è questa. Stiamo considerando un grafo $\mathcal{G}$, e ci chiediamo se si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati.

Facciamo un po’ di disegni spostando un lato qui e uno là, spostando qualche vertice, e se riusciamo a ridisegnare $\mathcal{G}$ senza sovrapposizione di lati (cioè a trovare un grafo isomorfo a $\mathcal{G}$ disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati) possiamo esclamare “BINGO!” e abbiamo dimostrato che $\mathcal{G}$ è un grafo piano.

Ad esempio (faccio un esempio facile facile) il grafo completo bipartito $\mathcal{K}_{2,3}$ è un grafo piano, perché si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di piani:





Questo dovrebbe suggerirvi una strategia per disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati anche $\mathcal{K}_{2,4}$ e più in generale $\mathcal{K}_{2,n}$ per qualsiasi $n \geq 1$: basta mettere i vertici “rossi” uno a sinistra e uno a destra e incolonnare nel mezzo tutti gli altri vertici. Non faccio il disegno perché sono stato più di un’ora a disegnare i grafi da $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_6$ e non ne posso più di Paint…

Tutto bene se riusciamo a trovarlo, ’sto disegno nel piano senza sovrapposizione di lati: ma, come si diceva, se non riusciamo a trovarlo come facciamo a capire se il problema è nostro, che non riusciamo a vedere la strada giusta, oppure è del grafo, che proprio non si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati?

Risulta utile una condizione ***necessaria*** affinché un grafo si possa disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati, espressa attraverso il numero n dei vertici, il numero λ dei lati e il “calibro” c (cioè la lunghezza c del ciclo di lunghezza minima che si può trovare in $\mathcal{G}$). Notate che il numero n dei vertici e il numero λ dei lati si possono calcolare facilmente (il miglior modo per calcolare senza confondersi il numero dei lati è utilizzando il teorema 1.3.1 sommare tutti i gradi dei vertici e poi dividere per due). Il calibro richiede più attenzione, ma in realtà (come si capisce dalla dimostrazione) c può essere qualunque numero non superiore al calibro, e quindi certamente possiamo sempre supporre $c = 3$ (vi ricordate che stiamo lavorando con grafi semplici e senza cappi?).

Teorema 4.2.1

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\ \mathcal{L},\ \iota)$ un grafo con $|\mathcal{V}| = n$, $|\mathcal{L}| = \lambda$. Se $\mathcal{G}$ è piano e ha calibro non inferiore a c,

$$\lambda \leq \tfrac{c}{c-2}(n-2).$$

Dimostrazione – Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia piano e un (qualsiasi) suo disegno nel piano senza sovrapposizione di lati abbia f facce. Ognuna di esse ha un contorno formato da almeno c lati, quindi

$$cf \leq 2\lambda$$

perché ogni lato di $\mathcal{G}$ appartiene al contorno di al più due facce (eventualmente di nessuna, ad esempio se uno dei suoi estremi è una foglia).

Ricordando che per la 4.1.F2 è $f \geq \lambda + 2 - n$, si ha che

$$c(\lambda + 2 - n) \leq cf \leq 2\lambda$$

ossia

$$(c-2)\lambda \leq c(n-2)$$

da cui immediatamente l'asserto.

La disuguaglianza $\lambda \leq \tfrac{c}{c-2}(n-2)$ trovata col teorema 4.2.1 è una condizione ***necessaria*** affinché il grafo $\mathcal{G}$ si possa disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati. Ciò significa che se tale disuguaglianza non è verificata allora ***certamente il grafo*** $\mathcal{G}$ ***non è piano***!

Possiamo utilizzare questa condizione per evitare di impazzire più del necessario sui grafi $\mathcal{K}_n$ e sul grafo $\mathcal{K}_{3,3}$:

Corollario 4.2.2

Se $n \geq 5$, il grafo completo $\boldsymbol{K}_n$ non è piano.

Dimostrazione – Per $n \geq 3$, il grafo completo $\boldsymbol{K}_n$ ha calibro 3, n vertici e $\frac{n(n-1)}{2}$ lati. Se è un grafo piano, per il teorema 4.2.1 deve essere

$$\tfrac{n(n-1)}{2} \leq 3(n-2)$$

ossia

$$n^2 - 7n + 12 \leq 0$$

cioè

$$(n-3)(n-4) \leq 0$$

e questa condizione, se $n \geq 5$, non è verificata.

Corollario 4.2.3

Se n e m sono numeri interi positivi entrambi maggiori di 2, il grafo completo bipartito $\boldsymbol{K}_{n,m}$ non è piano. In particolare, il grafo completo bipartito $\boldsymbol{K}_{3,3}$ non è piano.

Dimostrazione – Il grafo completo bipartito $\boldsymbol{K}_{n,m}$ ha calibro 4, $n+m$ vertici e nm lati. Se è piano, per il teorema 4.2.1 deve essere

$$nm \leq 2(n+m-2)\,.$$

Poiché $\boldsymbol{K}_{n,m} = \boldsymbol{K}_{m,n}$, possiamo supporre che sia $n \leq m$. Se fosse $n \geq 4$, si avrebbe

$$4m \leq nm \leq 2(2m-2) = 4(m-1),$$

assurdo. Se fosse invece $n = 3$, si avrebbe

$$nm = 3m \leq 2(m+1) = 2m+2$$

da cui $m \leq 2$, assurdo perché abbiamo supposto $3 = n \leq m$.

Adesso tornate indietro e riguardate i grafi $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$, $\mathcal{G}_5$ e $\mathcal{G}_6$. Che cosa potete dire alla luce del teorema 4.2.1?

Ne riparliamo nella prossima lezione (la seconda ora di oggi venerdì 20 marzo 2020).