Lezione n. 10: Proprietà di $\mathbb{R}^n$ –parte 2–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è (... :e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p(... ffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/03/2020

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Firenze, 14/03/2020

Proprietà di $\mathbb{R}^n$

Definizione

- Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A che del complementare A^c, di A.

Proprietà di $\mathbb{R}^n$

Definizione

- Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A che del complementare A^c di A.
- L'insieme dei punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota con ∂A.

Proprietà di $\mathbb{R}^n$

Definizione

- Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A che del complementare A^c, di A.
- L'insieme dei punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota con ∂A.

Osservazione

Come conseguenza diretta della definizione appena data, si ha che l'insieme A e il suo complementare A^c hanno la stessa frontiera

Proprietà di $\mathbb{R}^n$

Definizione

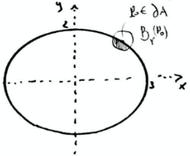
- Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A che del complementare A^c, di A.
- L'insieme dei punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota con ∂A.

Osservazione

Come conseguenza diretta della definizione appena data, si ha che l'insieme A e il suo complementare A^c hanno le stesse frontiere

Esempi

- Dato l'insieme $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}}$. Allora la frontiera di A è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Come visto in uno degli esempi precedenti, anche in questo caso abbiamo:



Proprietà di $\mathbb{R}^n$

Definizione

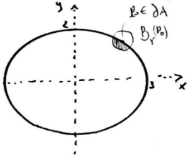
- Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A che del complementare A^c, di A.
- L'insieme dei punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota con ∂A.

Osservazione

Come conseguenza diretta della definizione appena data, si ha che l'insieme A e il suo complementare A^c hanno la stessa frontiera

Esempi

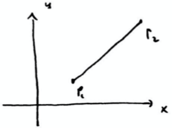
- Dato l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$. Allora la frontiera di A è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Come visto in uno degli esempi precedenti, anche in questo caso abbiamo:



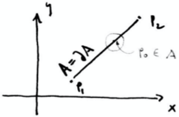
Comunque si prende $P_0 \in \{(x,y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$ in ogni intorno $B_r(P_0)$ di P_0 ci sono sia punti di A che di A^c.

Allora $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

- Se l'insieme A è il segmento di estremi P_1 e P_2:



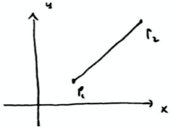
Allora la frontiera di A coincide con l'insieme A stesso, ovvero $A = \partial A$

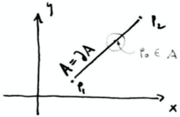


- Se l'insieme A è il segmento di estremi P_1 e P_2:

  Allora la frontiera di A coincide con l'insieme A stesso,

  ovvero $A = \partial A$





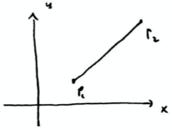
Definizione

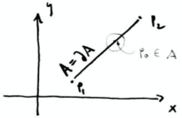
Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

- Se l'insieme A è il segmento di estremi P_1 e P_2:

  Allora la frontiera di A coincide con l'insieme A stesso,

  ovvero $A = \partial A$





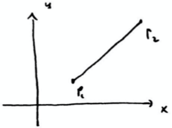
Definizione

Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

Osservazione

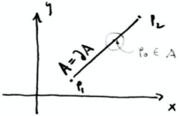
Si può provare che un insieme è chiuso $\Leftrightarrow$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

- Se l'insieme A è il segmento di estremi P_1 e P_2:



Allora la frontiera di A coincide con l'insieme A stesso,

ovvero $A = \partial A$



Definizione

Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

Osservazione

Si può provare che un insieme è chiuso $\Leftrightarrow$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Definizione

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ la chiusura di A (denotata con $\bar{A}$) è l'insieme $\bar{A} = A \cup \partial A$.

L'insieme $\bar{A}$ è un chiuso in $\mathbb{R}^n$ e, anzi, è il più piccolo chiuso contenente A

- Si può provare che un insieme è chiuso $\Leftrightarrow$ esso coincide con la sua chiusura.

  Inoltre si può provare che la chiusura di un insieme (ovvero $\bar{A} = A \cup \partial A$) si ottiene aggiungendo ad A tutti i suoi punti di accumulazione.

- Si può provare che un insieme è chiuso $\Leftrightarrow$ esso coincide con la sua chiusura.

Inoltre si può provare che la chiusura di un insieme (ovvero $\bar{A} = A \cup \partial A$) si ottiene aggiungendo ad A tutti i suoi punti di accumulazione.

<u>Osservazione</u>

Si ha che $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$, dove A^c denota il complementare di A in $\mathbb{R}^n$ (si ricorda che $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

un insieme e
il suo complementare
hanno la stessa frontiera

- Si può provare che un insieme è chiuso $\Leftrightarrow$ esso coincide con la sua chiusura.

Inoltre si può provare che la chiusura di un insieme (ovvero $\bar{A} = A \cup \partial A$) si ottiene aggiungendo ad A tutti i suoi punti di accumulazione.

<u>Osservazione</u>

Si ha che $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$, dove A^c denota il complementare di A in $\mathbb{R}^n$ (si ricorda che $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

un insieme e
il suo complementare
hanno la stessa frontiera

<u>Esempi</u>

- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è chiuso.
- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 = 2x + y + 1\}$ è un insieme chiuso.

- Si può provare che un insieme è chiuso $\Leftrightarrow$ esso coincide con la sua chiusura.

Inoltre si può provare che la chiusura di un insieme (ovvero $\bar{A} = A \cup \partial A$) si ottiene aggiungendo ad A tutti i suoi punti di accumulazione.

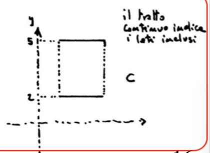
<u>Osservazione</u>

Si ha che $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$, dove A^c denota il complementare di A in $\mathbb{R}^n$ (si ricorda che $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

un insieme e il suo complementare hanno la stessa frontiera

<u>Esempi</u>

- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è chiuso.
- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 = 2x + y + 1\}$ è un insieme chiuso.
- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3,\ 2 \leq y \leq 5\}$ non è né chiuso né aperto:



- Si può provare che un insieme è chiuso $\Leftrightarrow$ esso coincide con la sua chiusura.

Inoltre si può provare che la chiusura di un insieme (ovvero $\bar{A} = A \cup \partial A$) si ottiene aggiungendo ad A tutti i suoi punti di accumulazione.

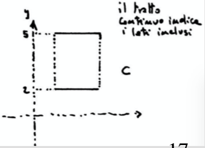
<u>Osservazione</u>

Si ha che $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$, dove A^c denota il complementare di A in $\mathbb{R}^n$ (si ricorda che $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

un insieme e il suo complementare hanno la stessa frontiera

<u>Esempi</u>

- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è chiuso.
- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y + 1\}$ è un insieme chiuso.
- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3,\ 2 \leq y \leq 5\}$ non è né chiuso né aperto:



- $C = \mathbb{R}^2$ è sia chiuso che aperto.

Esempio

L'insieme $\boxed{A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2+y^2 < 4 \}}$

non è né aperto (i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=1$, appartengono ad A ma non sono interni)

né chiuso (infatti i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=4$ non appartengono ad A ma sono di accumulazione per A)

Esempio

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 < 4\}$

non è né aperto (i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=1$, appartengono ad A ma non sono interni)

né chiuso (infatti i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=4$ non appartengono ad A ma sono di accumulazione per A)

Abbiamo che:

$$\boxed{\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}}$$

e inoltre:

$$\boxed{\bar{A} = A \cup \partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}.}$$

■

__Esempio__

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 < 4\}$

non è né aperto (i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=1$, appartengono ad A ma non sono interni) né chiuso (infatti i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=4$ non appartengono ad A ma sono di accumulazione per A)

Abbiamo che:

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$$

e inoltre: $\bar{A} = A \cup \partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. ■

__Esempio__

L'insieme $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}}$ non è aperto (poiché i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=1$ sono in A ma non sono interni) né chiuso ($(0,0) \notin A$ ma è un punto di accumulazione per A)

Esempio

L'insieme $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 < 4 \}$

non è né aperto (i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=1$, appartengono ad A ma non sono interni) né chiuso (infatti i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=4$ non appartengono ad A ma sono di accumulazione per A)

Abbiamo che:

$$\partial A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1 \} \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4 \}$$

e inoltre: $\bar{A} = A \cup \partial A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \}$. ■

Esempio

L'insieme $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 1 \}$ non è aperto (poiché i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=1$ sono in A ma non sono interni) né chiuso ($(0,0) \notin A$ ma è un punto di accumulazione per A)

Abbiamo che $\partial A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1 \} \cup \{(0,0)\}$ e $\bar{A} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1 \} = A \cup \{(0,0)\}$ ■

Esempio

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 < 1\}$ è un insieme limitato. Esso infatti è l'intorno di centro $(2,1)$ e raggio 1 (intorno sferico di $(2,1)$) ed è contenuto per esempio nella palla chiusa $\overline{B_4((0,0))} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\}$. Osserviamo che A è aperto

Esempio

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 < 1\}$ è un insieme limitato. Esso infatti è l'intorno di centro $(2,1)$ e raggio 1 (intorno sferico di $(2,1)$) ed è contenuto per esempio nella palla chiusa $\overline{B_4((0,0))} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\}$. Osserviamo che A è aperto e si ha che

$$\boxed{\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1\}}$$

$P_0 = (2,1)$

e inoltre

$$\boxed{\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 1\}}$$

Esempio

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 < 1\}$ è un insieme limitato. Esso infatti è l'intorno di centro $(2,1)$ e raggio 1 (intorno sferico di $(2,1)$) ed è contenuto per esempio nella palla chiusa $\overline{B_4((0,0))} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\}$. Osserviamo che A è aperto e si ha che

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1\}$$

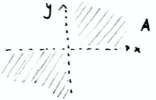
$P_0 = (2,1)$

e inoltre $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$

Esempio

Sia $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}}$ è un insieme aperto. Si ha che $\boxed{\partial A = \{(x,y) : x = 0 \text{ o } y = 0\}}$

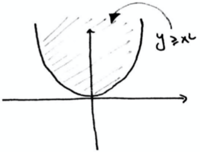
$\bar{A} = A \cup \partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \ge 0\}$



Inoltre A è un insieme illimitato.
(non limitato)

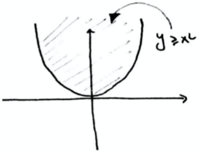
Esempio

$\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geq x^2\}}$ è un insieme non limitato

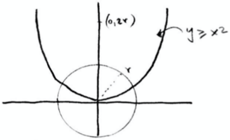


Esempio

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ è un insieme non limitato:

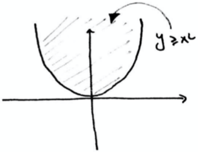


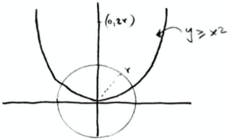
Infatti preso un qualunque $r>0$, allora si ha che $(0,2r) \in A$ non è contenuto in $\overline{B_r((0,0))}$



Esempio

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ è un insieme non limitato: Infatti preso un qualunque $r>0$, allora si ha che $(0,2r) \in A$ non è contenuto in $\overline{B_r((0,0))}$



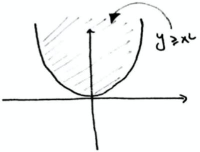


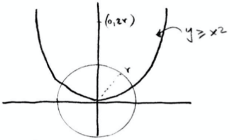
osserviamo che A è chiuso e $\partial A = \{(x,y) : y = x^2\}$

Inoltre $A = \bar{A}$.

Esempio

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ è un insieme non limitato: Infatti preso un qualunque $r > 0$, allora si ha che $(0,2r) \in A$ non è contenuto in $\overline{B_r((0,0))}$





osserviamo che A è chiuso e $\partial A = \{(x,y) : y = x^2\}$

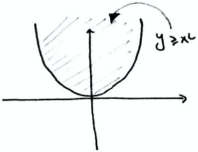
Inoltre $A = \bar{A}$.

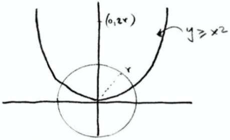
Definizione

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice <u>connesso</u> se non esistono due insiemi A_1, A_2, non vuoti, entrambi chiusi (o entrambi aperti) disgiunti e tali che $D = (A_1 \cap D) \cup (A_2 \cap D)$

Esempio

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ è un insieme non limitato: Infatti preso un qualunque $r > 0$, allora si ha che $(0,2r) \in A$ non è contenuto in $\overline{B_r((0,0))}$





osserviamo che A è chiuso e $\partial A = \{(x,y) : y = x^2\}$

Inoltre $A = \bar{A}$. ■

Definizione

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice connesso se non esistono due insiemi A_1, A_2, non vuoti, entrambi chiusi (o entrambi aperti) disgiunti e tali che $D = (A_1 \cap D) \cup (A_2 \cap D)$

- Un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice connesso se A non è l'unione di due insiemi aperti entrambi non vuoti e disgiunti.

- Un insieme chiuso C è connesso se C non è l'unione di due insiemi entrambi chiusi, non vuoti e disgiunti.

- Un insieme chiuso C è connesso se C <u>non</u> è l'unione di due insiemi entrambi chiusi, non vuoti e disgiunti.

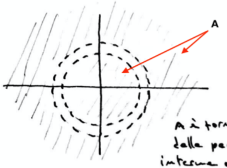
- Intuitivamente un insieme connesso è un insieme formato da un solo pezzo.

- Un insieme chiuso C è connesso se C non è l'unione di due insiemi entrambi chiusi, non vuoti e disgiunti.

- Intuitivamente un insieme connesso è un insieme formato da un solo pezzo.

Esempio

L'insieme $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x^2+y^2>4\}}$ è un insieme aperto, non limitato e inoltre A non è un insieme connesso.



A è formato dalla parte interna al cerchio più piccolo e dalla parte esterna al cerchio più grande ∎

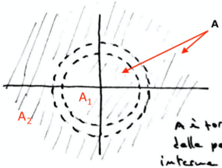
- Un insieme chiuso C è connesso se C <u>non</u> è l'unione di due insiemi entrambi chiusi, non vuoti e disgiunti.

- Intuitivamente un insieme connesso è un insieme formato da un solo pezzo.

<u>Esempio</u>

L'insieme $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x^2+y^2>4\}}$ è un insieme aperto, non limitato e inoltre <u>A non è un insieme connesso</u>.

$$\boxed{\begin{array}{c} A_1 \cup A_2 = A \\ A_1 \cap A_2 = 0 \end{array}}$$



A è formato dalla parte interna al cerchio più piccolo e dalla parte esterna al cerchio più grande ∎

- Un insieme chiuso C è connesso se C <u>non</u> è l'unione di due insiemi entrambi chiusi, non vuoti e disgiunti.

- Intuitivamente un insieme connesso è un insieme formato da un solo pezzo.

<u>Esempio</u>

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1 ,\ x^2+y^2>4\}$ è un insieme aperto, non limitato e inoltre A non è un insieme connesso.

<u>Successioni in $\mathbb{R}^n$</u>:

- Una successione $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ è una applicazione che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ il punto $P_n \in \mathbb{R}^n$ $\left(n \longmapsto P_n \in \mathbb{R}^n \right)$.

- Un insieme chiuso C è connesso se C <u>non</u> è l'unione di due insiemi entrambi chiusi, non vuoti e disgiunti.

- Intuitivamente un insieme connesso è un insieme formato da un solo pezzo.

<u>Esempio</u>

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x^2+y^2>4\}$ è un insieme aperto, non limitato e inoltre A non è un insieme connesso.

<u>Successioni in $\mathbb{R}^n$:</u>

- Una successione $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ è una applicazione che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ il punto $P_n \in \mathbb{R}^n$ $\quad (n \longmapsto P_n \in \mathbb{R}^n)$.

- Si dice che $\{P_n\}$ converge a $P \in \mathbb{R}^n$ (si denota: $P_n \longrightarrow P$, per $n \to +\infty$) se $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\ N = N_\varepsilon > 0$ t.c. per $n > N \Rightarrow \|P_n - P\| < \varepsilon$

$$P_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,n}),\quad P = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \quad \|P_n - P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{n,i} - x_i)^2}$$

- Un insieme chiuso C è connesso se C <u>non</u> è l'unione di due insiemi entrambi chiusi, non vuoti e disgiunti.

- Intuitivamente un insieme connesso è un insieme formato da un solo pezzo.

<u>Esempio</u>

L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x^2+y^2>4\}$ è un insieme aperto, non limitato e inoltre A non è un insieme connesso.

<u>Successioni in $\mathbb{R}^n$</u>:

- Una successione $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ è una applicazione che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ il punto $P_n \in \mathbb{R}^n$ $(n \mapsto P_n \in \mathbb{R}^n)$.

- Si dice che $\{P_n\}$ converge a $P \in \mathbb{R}^n$ (si denota: $P_n \to P$, per $n \to +\infty$) se $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\ N = N_\varepsilon > 0$ t.c. per $n > N \Rightarrow \| P_n - P \| < \varepsilon$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = P$$

$P_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,n})$, $P = (x_1, \dots, x_n)$ $\Rightarrow$ $\| P_n - P \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{n,i} - x_i)^2}$