Riassumiamo, e cambiamo leggermente il modo di procedere

Rappresentiamo un fenomeno fisico attraverso 2 diversi sistemi di coordinate invertibili (collegate fra loro attraverso una mappa invertibile)

OSSERV. 1: $(\bar{q}, \bar{p}, t)$: descr. Ham.; $(q, \dot{q}, t)$ descr. Lag.

OSSERV. 2: $(\bar{Q}, \bar{P}, t)$: descr. Ham'; $(Q, \dot{Q}, t)$ descr. Lag'

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H(q,p,t) \\ \dot{p} = -\partial_q H(q,p,t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{Q} = \partial_P H'(Q,P) \\ \dot{P} = -\partial_Q H'(Q,P) \end{cases}$$

con $H = H' + \dfrac{dF}{dt}$

Il sistema fisico ha 2n gradi di libertà (posiz.-velocità); (posizione-impulso)

In generale quindi potremo scegliere fra le 4n variabili dinamiche "viste" dai 2 osservatori una coppia di vettori: $\underbrace{(\bar{q}, \bar{p}, \bar{Q}, \bar{P})}_{\text{"osservabili" disponibili}}$

$$(\bar{q}, \bar{Q}); \ \underbrace{(\bar{q}, \bar{P}), \ \underset{①}{(\bar{q}, \bar{p})}; \ (\bar{p}, \bar{Q})}_{\text{equivalenti}}, \ (\bar{p}, \bar{P}), \ \underset{②}{(\bar{Q}, \bar{P})}$$

La scelta viene fatta per questioni di convenienza. Nei calcoli precedenti abbiamo sviluppato il metodo delle F. generatrici nel caso (q, Q) variabili indipendenti.

La scelta alternativa come v. i. (q, P) porta a particolari sviluppi.

L'equazione di partenza che avevamo utilizzato era la seguente

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) + H'(P, Q, t) - \sum P_i \dot{Q}_i =$$

$$= \frac{dF(q, Q)}{dt}$$

L'idea era di sfruttare il fatto che le v. i. (q, Q) e solo quelle apparivano derivate rispetto al tempo.

Ci riportiamo ad una situazione analoga, per le variabili (q, P): cambiare da $\dot{Q} \leftrightarrow \dot{P}$

Notiamo : $-\sum P_i \dot{Q}_i = -\frac{d}{dt} \sum_i P_i Q_i + \sum_i \dot{P}_i Q_i$

Sostituendo, ottengo

$$\sum_i p_i \dot{q}_i + \sum_i \dot{P}_i Q_i - H(p, q, t) + H'(P, Q, t) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(F(q, Q) + \sum_i P_i Q_i \right)$$

Definiamo $\underbrace{S(q,P,t) = F(q,Q,t) + \sum P_i Q_i}_{\text{cambio di variabili}}$

S Trasf. di Legendre di F : da $Q \to P$

infatti $\bar{P} = -\frac{\partial F}{\partial Q}$ NOTA il segno

Abbiamo ottenuto la nuova funzione generatrice $S(q,P,t)$ associata all'equazione

$$\sum_i p_i \dot{q}_i + \sum \dot{P}_i Q_i - H(\bar{q},\bar{p},t) + H'(\bar{Q},\bar{P},t) = \frac{d}{dt} S(q,P,t)$$

Procediamo come nel caso $F(q,Q,t)$

Calcoliamo $\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$

e otteniamo

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \left(Q_i - \frac{\partial S}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i - H + H' - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Annullando i vari termini ottengo il sist. di eq.

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} & (1) \\ & \qquad i = 1 \dots n \\ Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} & (2) \\ H'(\bar{P},\bar{Q},t) = H(\bar{p},\bar{q},t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\bar{q},\bar{P},t) & (3) \end{cases}$$

In maniera analoga al caso precedente, le eq. (1) e (2) possono essere utilizzate per ottenere le variabili dipendenti $(\bar{p}, \bar{Q})$ mancanti, una volta scelta S. Si sono quindi fissate tutte le variabili dinamiche nei 2 sistemi di riferimento. Possiamo quindi esplicitare le variabili nel "nuovo" sistema di rif. $(\bar{Q}, \bar{P})$ in funzione delle "vecchie" variabili $(\bar{q}, \bar{p})$.

Esplicitamente: da $\bar{p} = \frac{\partial S}{\partial q}(\bar{q}, \bar{P}, t)$ possiamo ricavare $\bar{P} = \bar{P}(\bar{p}, \bar{q}, t)$

Dalla (2) $\bar{Q} = \frac{\partial S}{\partial q}(\bar{q}, \bar{P}, t)\Big|_{\bar{P} = \bar{P}(\bar{p}, \bar{q}, t)}$

ottengo $\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{q}, \bar{p}, t)$

e possiamo passare da

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{Q}} = \frac{\partial H'}{\partial P}(\bar{Q}, \bar{P}, t) \\ \dot{\bar{P}} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}(\bar{Q}, \bar{P}, t) \end{cases}$$

dove $H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}$

Metodo Hamilton Jacobi

Torniamo adesso alla questione di come si possa semplificare l'integraz. temporale delle eq. Ham.
Dalle eq. precedenti abbiamo visto che la scelta di una funzione generatrice S porta ad un cambio di variabili $(\bar{q}, \bar{p}, t) \to (Q, P, t)$ t.c. la nuova Ham. H' è data da

$$H'(Q,P,t) = H(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q(Q,P,t), P)$$

Utilizziamo quest'ultima eq. per DEFINIRE H' nel nuovo sistema di rif. e trattiamo S come un incognita che deve risolvere l'equazione.
Imponiamo che H' nel nuovo sistema di rif. sia CICLICA rispetto a tutte le var. posiz. Q_i

$H'(Q,P,t) = H'(P,t)$; abbiamo già visto che in questo caso

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \alpha_i \text{ costanti}$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \underbrace{\omega_i}_{\text{cost.}} \qquad Q_i = Q_{i,0} + \omega_i t$$

Come caso limite, visto che H' è risulta costante

possiamo imporre $H' = 0$

in questo caso $\dot{Q} = \dot{P} = 0$ e le variab. dinamiche

sono costanti

Otteniamo così la seguente equazione per $S(q,P,t)$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t) + H(q,p,t) = 0$$

ma x le eq. costitutive $\bar{p} = \frac{\partial S}{\partial \bar{q}}$ (1)

inoltre le P_i sono costanti $P_i = \alpha_i$

otteniamo l'Equazione Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, P_i = \alpha_i, t) + H\Big(q_1, \ldots q_n; \underset{\underset{p_1}{\shortparallel}}{\frac{\partial S}{\partial q_1}}, \underset{\underset{p_2}{\shortparallel}}{\frac{\partial S}{\partial q_2}} \ldots \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\Big) = 0$$

in forma compatta

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\bar{q}, \frac{\partial S}{\partial \bar{q}}, t\right) = 0$$

Osserviamo che l'Eq. H-J che deve essere risolta nella incognita S è in generale un'eq. alle deriv. parziali $\left(\frac{\partial S}{\partial q}, \frac{\partial S}{\partial t}\right)$ non lineare!

Eq. Ham. : ODE 1° ordine non lineari

Eq H-J : PDE non lineare 1° ordine

In generale H-J è MOLTO più complicato da risolvere rispetto a Ham....

VANTAGGI: la non linearità è tipicamente quadratica ed esiste una classe ampia di problemi che possono essere integrati in maniera sistematica.

Esempio: Oscillatore armonico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{K}{2} q^2$$

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{K}{2} q^2 = 0$$

Utilizziamo la seguente Hp. di separazione di variabili $S(q,t) = \underbrace{W(q) + E(t)}_{\text{nuove incognite}}$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{dW}{dq} \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{dE}{dt}}_{\text{funz}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{K}{2} q^2}_{\text{funz. di } q} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{K}{2} q^2$$

Se $f(t) = g(q) \Rightarrow \underbrace{f(t) = g(q) = K}$

l'unica possib. che siano uguali è che siano entrambe costanti

$$-\frac{dE}{dt} = \beta \qquad \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{K}{2} q^2 = \beta$$

$$E = -\beta t \qquad E(0) = 0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = \beta$$

Risolvo rispetto a W

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{2m\beta - kq^2m}$$ integrazione per quadratura

$$\int dW = \int^q \sqrt{2m\beta - kq^2m}\, dq$$

$$W = \int^q \sqrt{2m\beta + kq^2m}\, dq$$

$$S(q,t) = E + W = -\beta t + \sqrt{mk}\int^q \sqrt{\frac{2\beta}{k} + q^2}\, dq$$

Utilizziamo S per ricavare la soluz. dell'oscill armonico nelle variabili originarie (q, p)

Ricordo $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\mathcal{H}'(P,Q) = 0 \Rightarrow \dot{P} = \dot{Q} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} P \text{ costante} \\ Q = \alpha \text{ costante} \end{array}$$

scegliamo come costante $P = \beta$ prend. def. finita

Utilizziamo $(2) \Rightarrow Q = \frac{\partial S}{\partial P} \Rightarrow \alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta}$

Otteniamo

$$Q = \alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} = -t + \sqrt{mk} \int^q \frac{d}{d\beta} \sqrt{\frac{2\beta}{k} + q^2}\, dq$$

$$= -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \int^q \left(\frac{2\beta}{k} + q^2\right)^{-1/2} dq$$

Risolviamo l'integrale $\quad \gamma^2 = \frac{2\beta}{k}$

$$\int^q \frac{1}{\sqrt{q^2+\gamma^2}}\, dq = \int^q \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{(q/\gamma)^2+1}}\, dq \overset{y = q/\gamma}{=}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\gamma}} \int^{y\gamma} \cancel{\gamma}\, \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\, dy = \arcsin(y\gamma) + C =$$

$$= \arcsin\left(q\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\right) + \cancel{C}^{\,0}$$

Otteniamo

$$\alpha = -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin\left((\alpha + t)\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$