Lezione n. 11: Funzioni di più variabili reali –parte 1–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Firenze, 14/03/2020

Funzioni reali di più variabili

- Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di due (di tre o di n) variabili se il suo dominio A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^n$).

Funzioni reali di più variabili

- Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di due (di tre o di n) variabili se il suo dominio A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^n$).

- Se una funzione f è di due (di tre o n) variabili, il valore che assume in un punto (x,y) (rispettivamente (x,y,z) o $(x_1, x_2, \dots, x_n)$) si denota con $f(x,y)$ ($f(x,y,z)$ o $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Funzioni reali di più variabili

- Una funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di due (di tre o di n) variabili se il suo dominio A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^n$).

- Se una funzione f è di due (di tre o n) variabili, il valore che assume in un punto (x,y) (rispettivamente (x,y,z) o $(x_1, x_2, \dots, x_n)$) si denota con $f(x,y)$ ($f(x,y,z)$ o $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

- Il grafico di una funzione di due variabili è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definito dall'insieme $\boxed{\operatorname{graf} f = \{ (\underbrace{x,y}_{\in A}, z) \in A \times \mathbb{R} \; : \; z = f(x,y) \}}$.

Funzioni reali di più variabili

- Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di due (di tre o di n) variabili se il suo dominio A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^n$).

- Se una funzione f è di due (di tre o n) variabili, il valore che assume in un punto (x,y) (rispettivamente (x,y,z) o $(x_1,x_2,\dots,x_n)$) si denota con $f(x,y)$ ($f(x,y,z)$ o $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$).

- Il grafico di una funzione di due variabili è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definito dall'insieme $\text{graf}\, f = \{ \underbrace{(x,y}_{\in A},z) \in A \times \mathbb{R} \ : \ z = f(x,y) \}$. In maniera analoga il grafico di una funzione di tre (o n) variabili è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (o di $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$).

Funzioni reali di più variabili

- Una funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di due (di tre o di n) variabili se il suo dominio A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^n$).

- Se una funzione f è di due (di tre o n) variabili, il valore che assume in un punto (x,y) (rispettivamente (x,y,z) o $(x_1,x_2,\dots,x_n)$) si denota con $f(x,y)$ ($f(x,y,z)$ o $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$).

- Il grafico di una funzione di due variabili è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definito dall'insieme $\operatorname{graf} f = \{(\underbrace{x,y}_{\in A},z) \in A \times \mathbb{R} \ : \ z = f(x,y)\}$. In maniera analoga il grafico di una funzione di tre (o n) variabili è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (o di $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$).

Alcuni fatti:

1. In analogia a quello che succede per le funzioni di una variabile reale è possibile comporre le funzioni, per esempio: Si può comporre $\boxed{f(x,y) = 9 - x^2 - y^2 \ \text{e} \ g(z) = \sqrt{z}}$

Funzioni reali di più variabili

- Una funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di due (di tre o di n) variabili se il suo dominio A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^n$).

- Se una funzione f è di due (di tre o n) variabili, il valore che assume in un punto (x,y) (rispettivamente (x,y,z) o $(x_1,x_2,\dots,x_n)$) si denota con $f(x,y)$ ($f(x,y,z)$ o $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$).

- Il grafico di una funzione di due variabili è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definito dall'insieme $\text{graf} f = \{(\underbrace{x,y}_{\in A},z) \in A \times \mathbb{R} \ : \ z = f(x,y)\}$. In maniera analoga il grafico di una funzione di tre (o n) variabili è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (o di $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$).

Alcuni fatti:

1. In analogia a quello che succede per le funzioni di una variabile reale è possibile comporre le funzioni, per esempio: Si può comporre $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ e $g(z) = \sqrt{z}$ ottenendo in questo caso $(g \circ f)(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ il cui dominio è l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\sqrt{9-x^2-y^2}$ abbia senso. Allora $\text{Dom}(g \circ f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ punti interni e $x^2 + y^2 = 9$.

2. Si può anche comporre una successione in $\mathbb{R}^2$ (cioè una funzione $\mathbb{N} \ni n \longmapsto (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$) con una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ottenendo così una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(x_n, y_n) \in \mathbb{R}$

Per esempio, dalla composizione della successione $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n^2, -2/n)\}$ con la funzione $f(x,y) = 3x + y^2$ dà la successione reale $\{f(x_n, y_n)\} = \{3/n^2 + \frac{4}{n^2}\} = \{7/n^2\}$.

2. Si può anche comporre una successione in $\mathbb{R}^2$ (cioè una funzione $\mathbb{N} \ni n \longmapsto (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$) con una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ottenendo così una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \ni n \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\overset{\in}{f(x_n, y_n)}}$

Per esempio, dalla composizione della successione $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n^2, -2/n)\}$ con la funzione $f(x,y) = 3x + y^2$ ho la successione reale $\{f(x_n, y_n)\} = \{3/n^2 + \frac{4}{n^2}\} = \{7/n^2\}$.

- In generale una successione $\{P_n\}$ in un insieme A, si può comporre con una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, ottenendo così una successione di numeri reali.

2. Si può anche comporre una successione in $\mathbb{R}^2$ (cioè una funzione $\mathbb{N} \ni n \longmapsto (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$) con una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ottenendo così una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(x_n, y_n) \in \mathbb{R}$

Per esempio, dalla composizione della successione $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n^2, -2/n)\}$ con la funzione $f(x,y) = 3x + y^2$ da la successione reale $\{f(x_n, y_n)\} = \{3/n^2 + \frac{4}{n^2}\} = \{7/n^2\}$.

- In generale una successione $\{P_n\}$ in un insieme A, si può comporre con una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, ottenendo così una successione di numeri reali.

Esempio

Il dominio della funzione $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{2x^2 + y^2 - 3} - 1\right)$ è dato dall'insieme seguente

2. Si può anche comporre una successione in $\mathbb{R}^2$ (cioè una funzione $\mathbb{N} \ni n \longmapsto (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$) con una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ottenendo così una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(x_n, y_n) \in \mathbb{R}$

Per esempio, dalla composizione della successione $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n, -2/n)\}$ con la funzione $f(x,y) = 3x + y^2$ da le la successione reale $\{f(x_n, y_n)\} = \{3/n^2 + \frac{4}{n^2}\} = \{7/n^2\}$.

- In generale una successione $\{P_n\}$ in un insieme A, si può comporre con una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, ottenendo così una successione di numeri reali

---

Esempio

Il dominio della funzione $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{2x^2+y^2-3} - 1\right)$ è dato dall'insieme seguente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\, f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2-3 \geq 0 \text{ e } \sqrt{2x^2+y^2-3} > 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 > 4\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} > 1\right\}\end{aligned}$$

2. Si può anche comporre una successione in $\mathbb{R}^2$ (cioè una funzione $\mathbb{N} \ni n \longmapsto (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$) con una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ottenendo così una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$: $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(x_n, y_n) \in \mathbb{R}$

Per esempio, dalla composizione della successione $\{(x_n, y_n)\} = \{(1/n^2, -2/n)\}$ con la funzione $f(x,y) = 3x + y^2$ da la successione reale $\{f(x_n, y_n)\} = \{3/n^2 + \frac{4}{n^2}\} = \{7/n^2\}$.

- In generale una successione $\{P_n\}$ in un insieme A, si può comporre con una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, ottenendo così una successione di numeri reali.

Esempio

Il dominio della funzione $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{2x^2+y^2-3} - 1\right)$ è dato dall'insieme seguente:

$$\mathrm{Dom}\, f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2-3 \geq 0 \text{ e } \sqrt{2x^2+y^2-3} > 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 > 4\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} > 1\right\}$$

Quindi Dom f è dato dalla parte di piano esterna all'ellisse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Osserviamo poi che

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial(\mathrm{Dom}\, f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/2 + y^2/4 = 1\right\} \\ \text{e } &\overline{\mathrm{Dom}\, f} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/2 + y^2/4 \geq 1\right\} \end{aligned}}$$

■

Esempio

Il dominio della funzione $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ è dato dall'insieme:

$$\boxed{\text{Dom } f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x-y}{x+y} < 1 \right\}} \qquad \text{(I)}$$

Esempio

Il dominio della funzione $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ è dato dall'insieme:

$$\mathrm{Dom}\, f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x-y}{x+y} < 1 \right\} \qquad \text{I}$$

$$\boxed{\Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \underbrace{-1 < \frac{x-y}{x+y}}_{\text{I}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{x-y}{x+y} < 1}_{\text{II}}}$$

Esempio

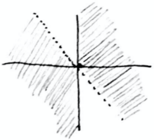
Il dominio della funzione $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ è dato dall'insieme:

$$\mathrm{Dom}\, f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x-y}{x+y} < 1 \right\} \qquad \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \quad \underset{\mathrm{I}}{-1 < \frac{x-y}{x+y}} \quad \text{e} \quad \underset{\mathrm{II}}{\frac{x-y}{x+y} < 1}$$

Allora

$$\boxed{\mathrm{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y>-x-y \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x-y<-x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x<0 \end{cases}}$$



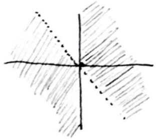
Esempio

Il dominio della funzione $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ è dato dall'insieme:

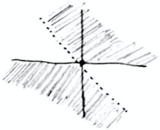
$$\mathrm{Dom}\, f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x-y}{x+y} < 1 \right\} \qquad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{t.c.} \quad \underset{\mathrm{I}}{-1 < \frac{x-y}{x+y}} \quad \text{e} \quad \underset{\mathrm{II}}{\frac{x-y}{x+y} < 1}$$

Allora $\quad \mathrm{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y > -x-y \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x-y < -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x<0 \end{cases}$



$$\mathrm{II} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y < x+y \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x-y > x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ y>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ y<0 \end{cases}$$



Esempio

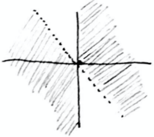
Il dominio della funzione $f(x,y) = \text{arcsen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ è dato dall'insieme:

$$\text{Dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x-y}{x+y} < 1 \right\} \qquad (\mathrm{I})$$

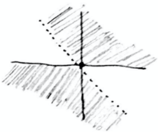
$$\Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \underbrace{-1 < \frac{x-y}{x+y}}_{\mathrm{I}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{x-y}{x+y} < 1}_{\mathrm{II}}$$

Allora

$$\mathrm{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y > -x-y \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x-y < -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x<0 \end{cases}$$

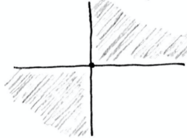


$$\mathrm{II} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y < x+y \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x-y > x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ y>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ y<0 \end{cases}$$



Allora $\text{Dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{arcsen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \right\}$

$=$



Esempio

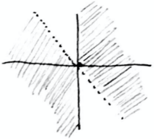
Il dominio della funzione $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ è dato dall'insieme:

$$\operatorname{Dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x-y}{x+y} < 1 \right\} \quad \text{I}$$

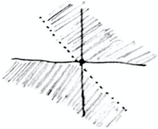
$$\Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \quad \underbrace{-1 < \frac{x-y}{x+y}}_{\text{I}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{x-y}{x+y} < 1}_{\text{II}}$$

Allora

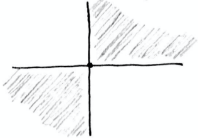
$$\text{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y > -x-y \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x-y < -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x<0 \end{cases}$$



$$\text{II} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y < x+y \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ x-y > x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ y>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y<0 \\ y<0 \end{cases}$$



Allora $\operatorname{Dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \right\} = \boxed{\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0 \right\} \setminus \{(0,0)\}}$

$=$ 

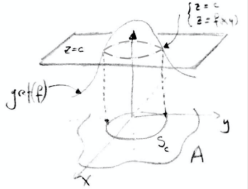
Linee di livello

Alcune volte per rappresentare il grafico (tridimensionale) di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, è utile rappresentare nel piano xy gli insiemi:

$$\boxed{S_c = \{ (x,y) \in A : f(x,y) = c \}}$$

dove c è una costante reale.

Tali insiemi sono detti insiemi di livello.

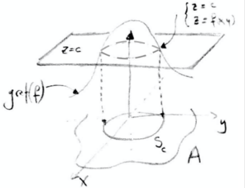


Linee di livello

tridimensionale

Alcune volte per rappresentare il grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, è utile rappresentare nel piano xy gli insiemi: $S_c = \{(x,y) \in A : f(x,y) = c\}$ dove c è una costante reale.

Tali insiemi sono detti insiemi di livello.



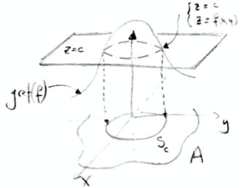
Esempio

Data la funzione $f(x,y) = x^2+y^2-4x$ studiamo le linee di livello.

Linee di livello

Alcune volte per rappresentare il grafico (tridimensionale) di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, è utile rappresentare nel piano xy gli insiemi: $S_c = \{(x,y) \in A : f(x,y) = c\}$ dove c è una costante reale.

Tali insiemi sono detti insiemi di livello.



Esempio

Data la funzione $f(x,y) = x^2+y^2-4x$ studiamo le linee di livello.

Fissato $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ consideriamo $f(x,y) = c \iff x^2+y^2-4x = c$

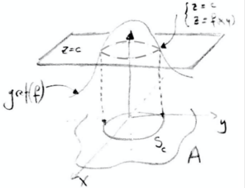
$\iff (x-2)^2+y^2 = c+4$. Quindi se $c > -4$ l'insieme di livello S_c è la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio $\sqrt{c+4}$ nel piano xy (ovvero $z=0$).

Se $c=-4 \Rightarrow S_c = \{(2,0)\}$, mentre se $c<-4 \Rightarrow S_c = \emptyset$.

Linee di livello

Alcune volte per rappresentare il grafico (tridimensionale) di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, è utile rappresentare nel piano xy gli insiemi: $S_c = \{(x,y) \in A : f(x,y) = c\}$ dove c è una costante reale.

Tali insiemi sono detti insiemi di livello.



Esempio

Data la funzione $f(x,y) = x^2+y^2-4x$ studiamo le linee di livello.

Fissato $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ consideriamo $f(x,y) = c \iff x^2+y^2-4x = c$

$\iff (x-2)^2+y^2 = c+4$. Quindi se $c > -4$ l'insieme di livello S_c è la circonferenza

di centro $(2,0)$ e raggio $\sqrt{c+4}$ nel piano xy (ovvero $z=0$).

se $c = -4 \Rightarrow S_c = \{(2,0)\}$, mentre se $c < -4 \Rightarrow S_c = \phi$.

Limite per una funzione reale di più variabili reali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di n-variabili reali e sia P_0 un punto di accumulazione per il dominio A di f. Si dice che $f(P)$, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, tende al numero reale L per P che tende a P_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, P \in A \cap B_\delta(P_0)$, $P \neq P_0$, allora $|f(P) - L| < \varepsilon$.

Equivalentemente si può dire che $f(P)$, $P=(x_1,x_2,...,x_n)\in A$, tende al numero reale L per P che tende a P_0 se $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$ t.c. $\forall\, P\in A$ con $0<\|P-P_0\|<\delta \Rightarrow |f(P)-L|<\varepsilon$

Equivalentemente si può dire che $f(P)$, $P=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, tende al numero reale L per P che tende a P_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall P \in A$ con $0 < \| P - P_0 \| < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$

<u>Osservazione</u>

In generale $\delta = \delta_\varepsilon$

Equivalentemente si può dire che $f(P)$, $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, tende al numero reale L per P che tende a P_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall P \in A$ con $0 < \| P - P_0 \| < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$

<u>Osservazione</u>

In generale $\delta = \delta_\varepsilon$

- Nel caso di una funzione di due variabili, $f = f(x,y)$, allora posto $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x,y) \in A$ la definizione precedente diventa: $f(x,y)$ tende ad un numero L per (x,y) che tende a (x_0,y_0)

Se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall P = (x,y) \in A$ con $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \| P - P_0 \| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

In questo caso si scrive $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$

Equivalentemente si può dire che $f(P)$, $P=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in A$, tende al numero reale L per P che tende a P_0 se $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$ t.c. $\forall\, P\in A$ con $0<\|P-P_0\|<\delta \Rightarrow |f(P)-L|<\varepsilon$

<u>Osservazione</u>

In generale $\delta=\delta_\varepsilon$

- Nel caso di una funzione di due variabili, $f=f(x,y)$, allora posto $P_0=(x_0,y_0)$ e $P=(x,y)\in A$ la definizione precedente diventa: $f(x,y)$ tende ad un numero L per (x,y) che tende a (x_0,y_0) se $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta_\varepsilon>0$ tale che $\forall\, P=(x,y)\in A$ con $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\|P-P_0\|<\delta$

$$\Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

In questo caso si scrive $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$

<u>Esempio</u>

Calcolare il $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(4xy)}{y}}$.

$\left(\text{qui } f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(4xy)}{y}\right)$

Equivalentemente si può dire che $f(P)$, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, tende al numero reale L per P che tende a P_0 se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, P \in A$ con $0 < \| P - P_0 \| < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$

Osservazione

In generale $\delta = \delta_\varepsilon$

- Nel caso di una funzione di due variabili, $f = f(x,y)$, allora posto $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x,y) \in A$ la definizione precedente diventa: $f(x,y)$ tende ad un numero L per (x,y) che tende a (x_0,y_0) se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall\, P = (x,y) \in A$ con $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \| P - P_0 \| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

In questo caso si scrive $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$

Esempio

Calcolare il $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y}$.

$\left(\text{qui } f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(4xy)}{y}\right)$

Osserviamo che se il limite $\exists \Rightarrow$ deve essere lo anche quando restringiamo la funzione a una qualche direzione particolare. Per esempio f(x, y)=sen($4xy/y$) ristretta all'asse y $(x=0)$ è tale che $f(0,y) = 0\ \forall y$

Quindi $\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$ (per la restrizione a $x=0$ il limite $\exists$ ed è nullo). Quindi, il limite della funzione data, se esiste, deve valere 0 (poiché deve essere lo stesso lungo tutte le direzioni).

Quindi $\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$ (per la restrizione a $x=0$ il limite $\exists$ ed è nullo). Quindi, il limite della funzione data, se esiste, deve valere 0 (poiché deve essere lo stesso lungo tutte le direzioni).

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, si ha che

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} - 0 \right| \leq \frac{4|xy|}{|y|} \leq 4|x| \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta < \varepsilon$$

da cui $\left| \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} \right| < \varepsilon$ a patto di prendere $\delta < \varepsilon/4$.

Quindi $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ (per la restrizione a $x=0$ il limite $\exists$ ed è nullo). Quindi, il limite della funzione data, se esiste, deve valere 0 (poiché deve essere lo stesso lungo tutte le direzioni).

Allora, fissato $\varepsilon>0$, si ha che

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} - 0 \right| \leq \frac{4|xy|}{|y|} \leq 4|x| \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta < \varepsilon$$

da cui $\left|\frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y}\right| < \varepsilon$ a patto di prendere $\delta < \varepsilon/4$.

<u>osserviamo che per $x \neq 0$</u> $\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4x\,\frac{\operatorname{sen}(4xy)}{4xy} = 0}$$

poiché $4x \to 0$ e $\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \to 1$ per $u = 4xy \to 0$

Quindi $\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$ (per la restrizione a $x=0$ il limite $\exists$ ed è nullo). Quindi, il limite

della funzione data, se esiste, deve valere 0 (poiché deve essere lo stesso lungo tutte le direzioni).

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, si ha che

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} - 0 \right| \leq \frac{4|xy|}{|y|} \leq 4|x| \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta < \varepsilon$$

da cui $\left| \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} \right| < \varepsilon$ a patto di prendere $\delta < \varepsilon/4$.

<u>osserviamo che per $x \neq 0$</u> $\Rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4x \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{4xy} = 0$$ poiché $4x \to 0$ e $\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \to 1$ per $u = 4xy \to 0$

<u>Per $x=0$</u> già sappiamo che il limite è zero $\Rightarrow$ Possiamo concludere anche in questo secondo modo rigoroso il fatto che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(4xy)}{y} = 0$ ∎