24 marzo 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

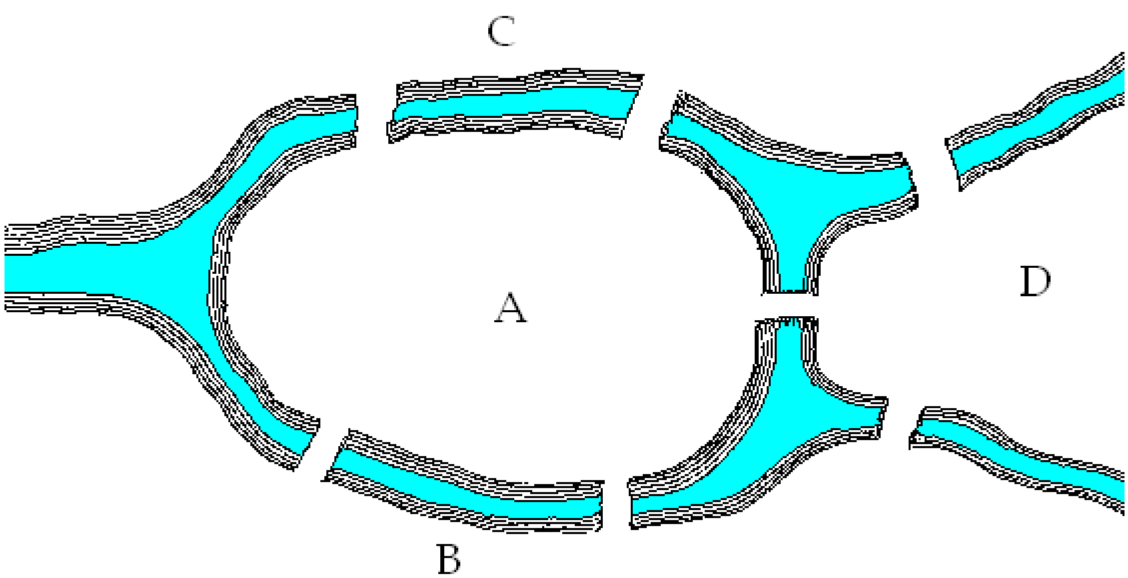
Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di martedì 24 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Abbiamo già incontrato più volte il matematico svizzero Leonhard Euler (nato a Basilea il 15 aprile 1707 e morto in Russia a San Pietroburgo il 18 settembre 1783). Basterà citare il teorema di Euler-Fermat (in cui Euler generalizza un risultato trovato da Fermat per i soli numeri primi), la funzione φ detta in suo onore appunto “di Euler”, e infine la formula di Euler che lega fra loro per un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati il numero n dei vertici, il numero λ dei lati, il numero f delle facce e il numero k delle componenti connesse.

Ma in realtà Leonhard Euler ha di fatto dato inizio (ok, abbastanza inconsapevolmente!) a tutta la teoria dei grafi, affrontando da par suo un problema in fondo banale che all’epoca veniva discusso informalmente sia fra la gente comune sia nel mondo matematico; ciò è avvenuto in un suo lavoro del 1736 (“Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis”, in *Commentarii Academiae Scientiarium Imperialis Petropolitanae* 8, pagg. 128-140) nel quale Euler esamina una questione specifica assolutamente marginale per generalizzarla opportunamente, tirarne fuori un bel teorema e, come appunto dicevo, gettare le basi per una teoria del tutto nuova per l’epoca (che peraltro ha dovuto attendere almeno cent’anni, ma diciamo anche duecento, prima di acquisire piena dignità nel mondo matematico).

Anche se di questi tempi non si può nemmeno uscire di casa, e figuriamoci quindi viaggiare fino al nord Europa, possiamo con la fantasia andare fino alla città di Kaliningrad, attraversata dal fiume Pregolya: è un’enclave russa di 430 000 abitanti situata tra la Polonia e la Lituania. Fondata nel 1255 col nome tedesco di Königsberg, è appartenuta alla Prussia e poi alla Germania fino al 1945, quando fu occupata dall’Armata Rossa; ha assunto il nome attuale in onore di Mikhail Kalinin (1875-1946) alla morte di quest’ultimo.

Nella Königsberg del diciottesimo secolo c'erano due isolotti sul fiume Pregolya collegati alla terraferma da sette ponti, grosso modo così:



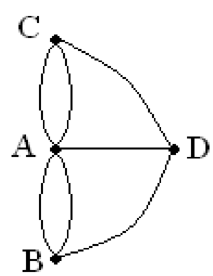
Nelle giornate non troppo fredde (siamo a 54° di latitudine nord...) gli abitanti di Königsberg passeggiavano tra gli isolotti, e a poco a poco si diffuse questa domanda: sarà possibile trovare un percorso che attraversi una e una sola volta ciascuno dei sette ponti?

Immaginatevi le discussioni: chi diceva che fosse impossibile trovare un tale percorso; chi sosteneva di averlo fatto ritornando al punto di partenza, ma ahimé non ricordava esattamente quale fosse stato l'ordine di percorrenza dei ponti; chi affermava di avere sì attraversato tutti i ponti una e una sola volta ma soltanto partendo dalla zona A e arrivando nella zona D (però chissà perché neanche lui ricordava che percorso aveva fatto).

Eh, sì, perché, come capite, se un problema ha soluzione è facile convincere gli altri di questo fatto: basta mostrarla, questa soluzione. Siccome nessuno riusciva a esibire un percorso che attraversasse tutti i ponti una e una sola volta, si cominciò a sospettare che chi diceva di averlo fatto in realtà mentisse (magari credendo in buona fede di averlo fatto, ma ricordando male!). Se invece un percorso che attraversasse una e una sola volta tutti i ponti non esisteva, ***non bastava*** dire "non sono riuscito a trovarlo": bisognava darne una dimostrazione!

Leonhard Euler fece alcune cose tipicamente da matematico.

Prima cosa, schematizzò il problema! Fece un disegno come questo



dove i quattro punti A, B, C e D rappresentavano rispettivamente il primo isolotto, la riva sud, la riva nord e il secondo isolotto, mentre i 7 archi di curva semplice piana disegnati fra i vari punti rappresentavano i 7 ponti oggetto della discussione. In altre parole (anche se Euler non lo sapeva…) disegnò un (multi)grafo senza orientamento!

Un percorso che attraversi i 7 ponti una e una sola volta corrisponde a un cammino che comprenda tutti i lati del grafo. In effetti non abbiamo chiarito se insistiamo a voler tornare nella zona di partenza (in questo caso il cammino deve essere *chiuso*, cioè deve essere un *circuito*) oppure ci accontentiamo di attraversare i ponti una e una sola volta, e pazienza se ci ritroviamo alla fine da un'altra parte (in questo caso il cammino non deve necessariamente essere chiuso).

Una volta fatta questa schematizzazione, fu facile per Euler dimostrare che il percorso richiesto non poteva esistere: ogni volta che, percorrendo un lato del grafo, "passate" da un vertice (arrivando su di esso, e poi uscendo da esso) "bruciate" due lati incidenti quel vertice (li "bruciate" nel senso che non potrete più ripassarci!) e quindi (siccome alla fine del percorso dovete avere utilizzato *tutti* i lati) ogni vertice del (multi)grafo (tranne il primo e l'ultimo) deve avere grado pari! (Se alla fine del percorso non tornate al punto di partenza, il primo vertice e l'ultimo avranno grado dispari, se invece tornate al punto di partenza anche il vertice di partenza deve avere grado pari). Ma nel (multi)grafo che schematizza i ponti di Königsberg tutti e quattro i vertici hanno grado dispari! E questo dimostra che il percorso richiesto non è possibile.

Ma dopo aver schematizzato la situazione, Euler continuò a ragionare da matematico. E come seconda mossa, *generalizzò* il suo ragionamento: col linguaggio di oggi, possiamo dire che osservò che la condizione che ogni vertice (tranne eventualmente due) abbia grado pari è *condizione necessaria in generale* (cioè non solo nel caso del grafo dei ponti di Königsberg) affinché esista un cammino che comprenda una e una sola volta tutti i lati del grafo.

E infine, Euler si chiese quello che qualunque matematico si chiede quando trova una condizione necessaria: tale condizione è anche *sufficiente*? Beh, in effetti la parte “difficile” del lavoro di Euler non era certo dimostrare che la condizione è necessaria (ma attenzione, il fatto che quella parte non fosse difficile dipendeva dall’intelligenza di Euler, che aveva trovato il giusto modo di schematizzare il problema!). E la risposta è, sostanzialmente: sì, la condizione è anche sufficiente purché il grafo sia connesso. Adesso vedremo come si dimostra.

Come al solito, ci serve una opportuna definizione, e non vi stupirà che con essa si omaggi l’eroe del giorno, cioè appunto Leonhard Euler.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\ \mathcal{L},\ \iota)$ un grafo. Un cammino di $\mathcal{G}$ (eventualmente chiuso, cioè eventualmente un circuito)

$$v_0,\, \ell_1,\, v_1,\, \ell_2,\, ...,\, v_{i-1},\, \ell_i,\, v_i,\, ...,\, v_{s-1},\, \ell_s,\, v_s$$

si dice *euleriano* se $\mathcal{L} = \{\ell_1,\ \ell_2,\ ...,\ell_i,\ ...,\ \ell_s\}$ (cioè se vi compaiono tutti i lati di $\mathcal{G}$). Poiché in un cammino i lati sono tutti diversi fra loro, in un cammino euleriano di $\mathcal{G}$ ogni lato di $\mathcal{G}$ compare ***esattamente una volta***. Se $\mathcal{G}$ non ha vertici isolati, in un cammino euleriano di $\mathcal{G}$ compare ogni vertice di $\mathcal{G}$ (eventualmente più volte); in particolare, tranne il caso che $\mathcal{G}$ abbia infiniti vertici isolati, se esiste in $\mathcal{G}$ un cammino euleriano allora $\mathcal{G}$ è un grafo finito.

Un grafo si dice *euleriano* se in esso esiste un circuito euleriano.

Vale la pena di osservare che la definizione di cammino euleriano (e quindi di grafo euleriano) ha senso sia quando il grafo in questione è senza orientamento sia quando il grafo in questione è con orientamento. Poiché Euler si occupò del caso senza orientamento, dedichiamo la nostra attenzione prima di tutto a tale caso.

Teorema 5.2.1 (Euler)

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

(i) in $\mathcal{G}$ esiste un circuito euleriano;

(ii) $\mathcal{G}$ è connesso, e ogni vertice di $\mathcal{G}$ ha grado pari.

Dimostrazione – $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia C un circuito euleriano di $\mathcal{G}$. Poiché $\mathcal{G}$ non ha vertici isolati, in C compare ogni vertice di $\mathcal{G}$: dunque $\mathcal{G}$ è connesso. Sia ora v un vertice di $\mathcal{G}$; ogni volta che v compare in C vi compaiono anche due collegamenti di $\mathcal{G}$ incidenti v oppure un cappio di $\mathcal{G}$ incidente v; poiché ogni lato di $\mathcal{G}$ compare una e una sola volta in C, il grado di v deve essere pari.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Procediamo per induzione sul numero λ di lati di $\mathcal{G}$. Se $\lambda = 1$, $\mathcal{G}$ consiste di un vertice con un cappio, quindi è euleriano. Sia allora $\lambda > 1$, e supponiamo (ipotesi di induzione) che ogni grafo connesso privo di vertici isolati con tutti i vertici di grado pari che abbia meno di λ lati sia euleriano.

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso con tutti i vertici di grado pari e λ lati (necessariamente privo di vertici isolati). Allora (per il teorema 1.3.4) $\mathcal{G}$ è finito e (per il teorema 3.2.2) non può essere un albero, dunque ha almeno un circuito; sia C_0 un circuito di lunghezza massima in $\mathcal{G}$.

Dimostriamo che C_0 è un circuito euleriano di $\mathcal{G}$ procedendo per assurdo: se non lo fosse, il grafo $\mathcal{G}^\star$ ottenuto da $\mathcal{G}$ eliminando tutti i lati che compaiono in C_0 avrebbe almeno un lato ℓ; sia $\mathcal{G}_1^\star$ la componente connessa di $\mathcal{G}^\star$ a cui appartiene ℓ. Poiché ogni vertice di $\mathcal{G}$ ha grado pari e per passare a $\mathcal{G}^\star$ abbiamo tolto i lati di un circuito (quindi uno o più cappi e una o più coppie di collegamenti per ogni vertice), anche in $\mathcal{G}^\star$ (e quindi in $\mathcal{G}_1^\star$) ogni vertice ha grado pari; inoltre $\mathcal{G}_1^\star$ è un grafo connesso con meno di λ lati, quindi per l'ipotesi di induzione esiste in $\mathcal{G}_1^\star$ un circuito euleriano C_1.

Siano v e w due vertici di $\mathcal{G}$ scelti rispettivamente in C_0 e in C_1 in modo che abbiano distanza minima (esistono certamente perché $\mathcal{G}$ è connesso). Deve essere $v = w$: altrimenti nel cammino di minima lunghezza avente per estremi v (in C_0) e w (in C_1)

$$v, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{s-1}, \ell_s, w$$

il lato ℓ_s dovrebbe appartenere a $\mathcal{G}_1^\star$ (che, ricordiamo, è una componente conessa di $\mathcal{G}^\star$) e quindi a C_1(che per ipotesi è un circuito euleriano di $\mathcal{G}_1^\star$); ma allora anche v_{s-1} apparterrebbe a C_1, assurdo per come abbiamo scelto v e w. Poiché $v = w$, tale vertice è comune a C_0 e C_1 e quindi percorrendo a partire da v tutto C_0 e poi tutto C_1 avremmo un circuito di $\mathcal{G}$ di lunghezza maggiore di quella di C_0. Però noi avevamo scelto C_0 in modo che avesse lunghezza massima fra tutti i circuiti di $\mathcal{G}$: dall'ipotesi che C_0 non fosse un circuito euleriano di $\mathcal{G}$ si è così raggiunto un assurdo, come si voleva.

Poiché un cammino è un caso particolare di circuito, in ogni grafo euleriano esistono cammini euleriani (il cui vertice di inizio può essere scelto arbitrariamente). Ma il teorema 5.2.1 consente anche una caratterizzazione dei grafi (senza orientamento) in cui esiste un cammino euleriano.

Corollario 5.2.2

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento privo di vertici isolati, e siano v, w due vertici di $\mathcal{G}$ con $v \neq w$. Sono fatti equivalenti:

(i) in $\mathcal{G}$ esiste un cammino euleriano di estremi v e w;

(ii) $\mathcal{G}$ è connesso, v e w hanno grado dispari e ogni altro vertice di $\mathcal{G}$ ha grado pari.

Dimostrazione – $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia C un cammino euleriano di $\mathcal{G}$. Poiché $\mathcal{G}$ non ha vertici isolati, in C compare ogni vertice di $\mathcal{G}$: dunque $\mathcal{G}$ è connesso. Sia ora $\mathcal{G}^\star$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ aggiungendo un nuovo lato ℓ incidente v e w. In $\mathcal{G}^\star$ esiste un circuito euleriano (ottenuto “completando” con ℓ il cammino euleriano di estremi v e w esistente per ipotesi in $\mathcal{G}$), dunque (per il teorema 5.2.1) ogni vertice di $\mathcal{G}^\star$ ha grado pari in $\mathcal{G}^\star$. Per come si è costruito $\mathcal{G}^\star$, i vertici di $\mathcal{G}^\star$ sono gli stessi di $\mathcal{G}$, e si ha che:

– $gr_{\mathcal{G}}(v) = gr_{\mathcal{G}^\star}(v) - 1$, dunque $gr_{\mathcal{G}}(v)$ è dispari;

– $gr_{\mathcal{G}}(w) = gr_{\mathcal{G}^\star}(w) - 1$, dunque $gr_{\mathcal{G}}(w)$ è dispari;

– $gr_{\mathcal{G}}(\overline{v}) = gr_{\mathcal{G}^\star}(\overline{v})$ per ogni altro vertice $\overline{v}$, dunque ogni altro vertice di $\mathcal{G}$ ha grado pari in $\mathcal{G}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sia $\mathcal{G}^\star$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ aggiungendo un nuovo lato ℓ incidente v e w. Poiché $\mathcal{G}^\star$ è connesso e ogni suo vertice ha grado pari (infatti aggiungendo ℓ il grado di v e w è aumentato di uno), per il teorema 5.2.1 in $\mathcal{G}^\star$ esiste un circuito euleriano C. Togliendo da C il lato ℓ, si ottiene un cammino euleriano di $\mathcal{G}$ di estremi v e w.

Corollario 5.2.3

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

(i) in $\mathcal{G}$ esiste un cammino euleriano;

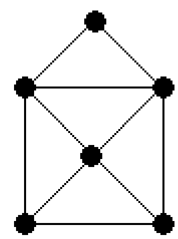
(ii) $\mathcal{G}$ è connesso e ogni vertice di $\mathcal{G}$, tranne al più due, ha grado pari.

Dimostrazione – $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia C un cammino euleriano di $\mathcal{G}$ e siano v e w i suoi estremi. Se $v = w$, C è un circuito: dunque $\mathcal{G}$ è un grafo euleriano e quindi (per il teorema 5.2.1) è connesso e ogni suo vertice ha grado pari. Se invece $v \neq w$, per il corollario 5.2.2 $\mathcal{G}$ è connesso, v e w hanno grado dispari e ogni altro vertice di $\mathcal{G}$ ha grado pari.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia connesso. Se ogni vertice di $\mathcal{G}$ ha grado pari, per il teorema 5.2.1 in $\mathcal{G}$ esiste un circuito euleriano, che è in particolare un cammino euleriano. Se invece in $\mathcal{G}$ esistono vertici di grado dispari, per il teorema 1.3.2 questi devono essere almeno 2, e quindi, poiché vale la (ii), devono essere esattamente 2; si può quindi applicare il corollario 5.2.2 e concludere anche in questo caso che in $\mathcal{G}$ esiste un cammino euleriano.

Esempio 5.2.5

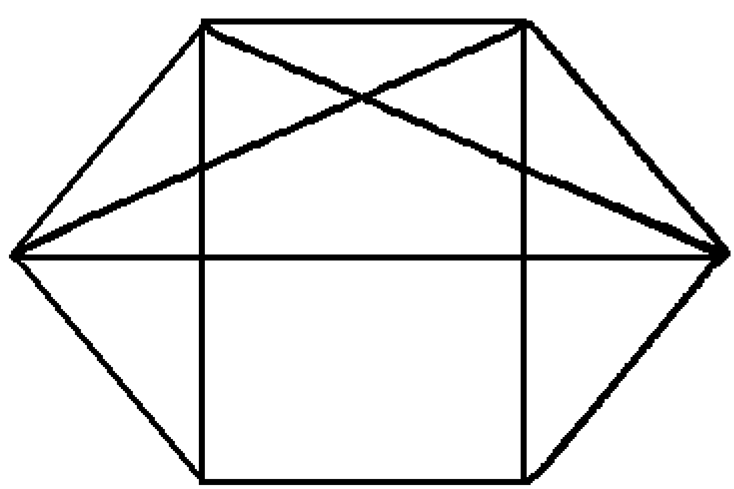
Un classico (quanto facile) rompicapo chiede di disegnare la “busta” qui sotto riprodotta senza mai staccare la penna dal foglio e senza mai ripassare su uno stesso tratto (è lecito però ritornare su singoli punti già tracciati):



Interpretando il disegno come un grafo disegnato sul piano che ha per lati i segmenti tracciati e per vertici i punti comuni ad almeno due di tali segmenti, il problema si traduce nel cercare un cammino euleriano: per il corollario 5.2.2 tale cammino esiste, parte da uno dei due vertici di grado dispari e termina sull’altro vertice di grado dispari.

Esercizio

E ora vediamo se avete capito... è possibile tracciare questo disegno senza staccare mai la matita dal foglio di carta? È possibile fare ciò ritornando sullo stesso punto da cui siamo partiti?



Lascio per esercizio ai volenterosi la dimostrazione per i grafi con orientamento dei risultati analoghi al teorema 5.2.1 e ai suoi due corollari:

Teorema 5.3.1

Sia $\mathcal{G}$ un grafo con orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

(i) in $\mathcal{G}$ esiste un circuito euleriano

(ii) $\mathcal{G}$ è connesso, e per ogni vertice v di $\mathcal{G}$ si ha $gr^{(e)}(v) = gr^{(u)}(v)$.

Corollario 5.3.2

Sia $\mathcal{G}$ un grafo con orientamento privo di vertici isolati, e siano v_1, v_2 due vertici di $\mathcal{G}$ con $v_1 \neq v_2$. Sono fatti equivalenti:

(i) in $\mathcal{G}$ esiste un cammino euleriano di estremi v_1 e v_2;

(ii) $\mathcal{G}$ è connesso, $gr^{(u)}(v_1) = gr^{(e)}(v_1) + 1$, $gr^{(e)}(v_2) = gr^{(u)}(v_2) + 1$ e per ogni altro vertice v di $\mathcal{G}$ si ha $gr^{(e)}(v) = gr^{(u)}(v)$.

Corollario 5.3.3

Sia $\mathcal{G}$ un grafo con orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

(i) in $\mathcal{G}$ esiste un cammino euleriano;

(ii) $\mathcal{G}$ è connesso, e per ogni vertice v di $\mathcal{G}$ si ha $gr^{(e)}(v) = gr^{(u)}(v)$ tranne eventualmente per due, v_1 e v_2, per i quali si ha $gr^{(u)}(v_1) = gr^{(e)}(v_1) + 1$ e $gr^{(e)}(v_2) = gr^{(u)}(v_2) + 1$.