24 marzo 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di martedì 24 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Nella precedente “ora” di lezione (*virtuale*…) abbiamo caratterizzato competamente i (multi)grafi nei quali esiste un *circuito* (cioè un cammino chiuso) in cui compaiono una e una sola volta tutti i lati. Beh, in realtà abbiamo anche caratterizzato i (multi)grafi nei quali esiste un *cammino* (non chiuso) in cui compaiono una e una sola volta tutti i lati. Questi due risultati, come abbiamo visto, risalgono a quasi trecento anni fa, anche se all’epoca nessuno parlava di “grafi” e Leonhard Euler, che per primo li ha dimostrati, era convinto di aver risolto un problema di *geometria*.

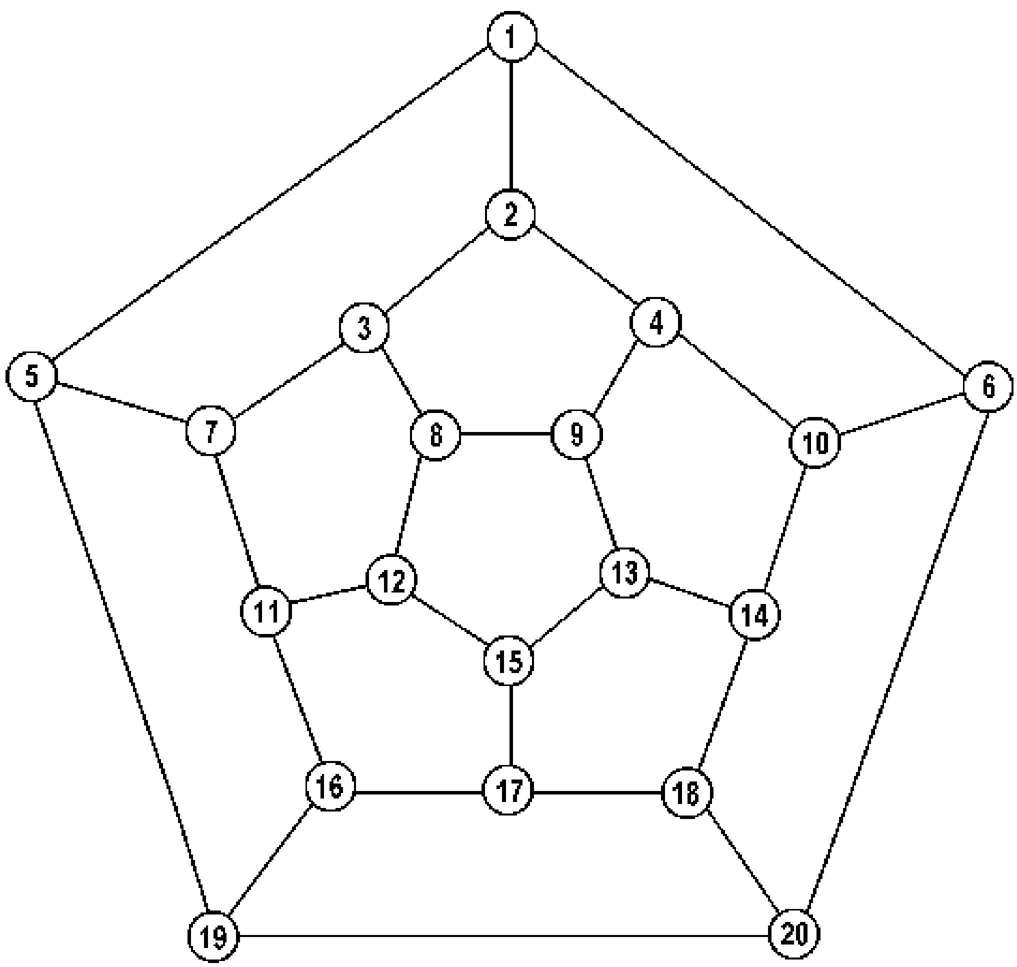
Adesso facciamo un salto in avanti di circa cento anni, e arriviamo alla metà del diciannovesimo secolo. Un matematico inglese, William Rowland Hamilton, si imbatte nel lavoro di Euler e nella sua schematizzazione del problema dei ponti di Königsberg mediante punti e archi di curve semplici disegnati nel piano.

Ricorderete che Euler aveva risolto questo problema: come facciamo a decidere se in un grafo esiste un circuito euleriano, cioè un circuito nel quale ogni lato compare una e una sola volta?

La risposta di Euler è semplicissima. Trascuriamo eventuali vertici isolati, che stanno lì unicamente per disturbare l’analisi del problema e risultano ininfluenti (infatti nessun lato è incidente a un vertice isolato, per definizione stessa di vertice isolato!). Ciò fatto, se il grafo è senza orientamento allora in esso c’è un circuito euleriano se e soltanto se il grafo è connesso e ogni vertice ha grado pari; se invece il grafo è con orientamento, allora in esso c’è un circuito euleriano se e soltanto se il grafo è connesso e per ogni vertice il grado in entrata è uguale al grado in uscita.

Chissà se cento anni dopo, quando Hamilton meditava su queste cose, la parola “grafo” era già entrata in uso. Certamente, di “teoria dei grafi” come ramo della matematica ancora non si parlava, però si era scoperto che, ad esempio, l’insieme dei vertici e degli spigoli di un poliedro si può schematizzare con un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi (pensate di “aprire” l’involucro del poliedro bucando una faccia, e stendere poi tale involucro sul piano: i vertici del poliedro diventano i vertici del grafo, gli spigoli del poliedro diventano i lati del grafo e le facce del poliedro diventano… le facce del grafo! La faccia che avete bucato per “aprire” l’involucro del poliedro diventa la faccia esterna!).

Ad esempio, un dodecaedro dà luogo al seguente grafo:



Hamilton si accorse che esiste un circuito nel grafo del dodecaedro con la proprietà che in esso ogni ***vertice*** compare una e una sola volta! (Voi riuscite a trovarlo? Ma se vi riesce, e certamente vi riuscirà perché la cosa non è difficile, ricordate che la cosa “da matematico” era ***avere l’idea*** di cercare un siffatto circuito!).

Dunque un circuito nel quale ogni vertice compare una e una sola volta… questa idea ricorda quella di “circuito euleriano”, ma questa volte è ***ogni vertice***, non *ogni lato*, che deve comparire una e una sola volta! (E questo intanto già ci dice che è più che un circuito: è un circuito semplice, cioè un ciclo!). Un eventuale ciclo con questa proprietà si dice, in onore di Hamilton, un *ciclo hamiltoniano* (mentre un eventuale *cammino* nel quale ogni vertice compare una e una sola volta si dice un *cammino haniltoniano*). Probabilmente a Hamilton sarebbe piaciuto trovare una condizione necessaria e sufficiente per l’esistenza di un ciclo hamiltoniano, un bel teorema come quello di Euler; ma non ci riuscì, giocò per un poco con il concetto e poi si dedicò ad altre cose.

Non è però che Hamilton fosse poco bravo: non trovò la condizione necessaria e sufficiente per l’esistenza di un ciclo (o anche solo di un cammino) hamiltoniano perché il problema è moooolto difficile (in effetti una tale condizione non è a tutt’oggi conosciuta). Dovevano passare altri cento anni prima che il problema venisse affrontato seriamente e si ottenesse *qualche* risultato: ad esempio, una condizione sufficiente (ma pesantuccia assai, e certo tutt’altro che necessaria!) e qualche condizione necessaria (ma certamente non sufficiente).

Cominciamo dalla condizione sufficiente. Prima di enunciarla, mettiamo a posto le definizioni.

Sia $\mathcal{G} := (\mathcal{V},\ \mathcal{L},\ \iota)$ un grafo (che, per evitare inutili distinguo e complicazioni, supporremo avere almeno tre vertici). Un cammino semplice di $\mathcal{G}$ (eventualmente chiuso, cioè eventualmente un ciclo)

$$v_1,\ \ell_2,\ v_2,\ \ell_3,\ ...,\ v_{i-1},\ \ell_i,\ v_i,\ ...,\ v_{n-1},\ \ell_n,\ v_n$$

si dice un *cammino hamiltoniano* se $\mathcal{V} = \{v_1,\ v_2,\ ...,v_i,\ ...,\ v_n\}$ (cioè se vi compaiono tutti i vertici di $\mathcal{G}$). Poiché in un cammino semplice i vertici sono tutti diversi fra loro (fatta salva la possibilità che gli estremi coincidano, cioè che sia un ciclo), in un cammino hamiltoniano di $\mathcal{G}$ ogni vertice di $\mathcal{G}$ compare esattamente una volta (mentre ogni lato di $\mathcal{G}$ compare, come in qualsiasi cammino, al più una volta). In particolare, se esiste in $\mathcal{G}$ un cammino hamiltoniano allora $\mathcal{V}$ è un insieme finito.

Un ciclo che sia un cammino hamiltoniano si dice un *ciclo hamiltoniano*. Un grafo si dice *hamiltoniano* se in esso esiste un ***ciclo hamiltoniano***.

Osservazione 6.1.1

Un grafo senza orientamento con n (≥ 3) vertici è hamiltoniano se e soltanto se è indotto da un suo sottografo isomorfo al ciclo $\boldsymbol{C}_n$.

Osservazione 6.1.2

Un grafo senza orientamento (con almeno tre vertici) è hamiltoniano se e soltanto se il suo sostegno è hamiltoniano.

Nel seguito di questa lezione, e nella prossima, considereremo sempre grafi senza orientamento. Per l’osservazione 6.1.2, potremo supporli semplici e senza cappi.

Osservazione 6.1.4

Per ogni numero naturale n (≥ 3) il grafo completo $\boldsymbol{K}_n$ è hamiltoniano.

Dimostrazione – Siano v_1, v_2, ..., v_n i lati del grafo. Comunque presi v_i e v_j, per definizione di $\boldsymbol{K}_n$ esiste un lato ℓ_{ij} incidente con essi, e tali lati sono a due a due distinti perché hanno estremi distinti. Dunque

$$v_1, \ell_{12}, v_2, \ell_{23}, ..., v_{n-1}, \ell_{(n-1)n}, v_n, \ell_{1n}, v_1$$

è un ciclo hamiltoniano di $\boldsymbol{K}_n$.

La più importante condizione sufficiente affinché un grafo sia hamiltoniano è stata trovata meno di cento anni fa dal matematico norvegese Øystein Ore (1899-1968). In tutti questi anni la dimostrazione è stata molto semplificata (la trovate esposta completamente negli appunti disponibili in rete, ma non è in programma!) e anche l’enunciato del teorema è stato un po’ semplificato.

Per non complicarvi troppo la vita, mi limiterò ad enunciare il teorema e a fare qualche osservazione sul suo contenuto:

Teorema 6.2.3 (Ore)

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento semplice e senza cappi con n (≥ 3) vertici. Se comunque presi due vertici v, w di $\mathcal{G}$ non adiacenti si ha

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n$$

allora $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.

Se ci pensate bene, quello che dice questo teorema non è sorprendente: se nel grafo ci sono ***molti collegamenti***, allora certamente c’è un modo per attraversare tutti i vertici una e una sola volta ritornando alla fine sul vertice di partenza. Naturalmente, cappi e lati paralleli non contano (se dal vertice v siete passati sul vertice w, è inutile avere altri lati che collegano v e w: quei due vertici sono stati raggiunti, e dobbiamo preoccuparci solo dei vertici rimanenti!), per questo ragioniamo su un grafo semplice e senza cappi.

Ma siccome in matematica “molti” non vuol dire niente, ecco che l’enunciato del teorema ci precisa il numero: comunque presi due vertici, bisogna che i collegamenti incidenti l’uno e l’altro di essi, sommati, siano almeno tanti quanto è il numero totale dei vertici. Ovviamente, è davvero un bel numero! Nella forma originale, il teorema di Ore chiedeva che ogni vertice avesse grado *almeno* $\frac{n}{2}$. Questo enunciato è leggermente migliore, ma mica poi tanto: se c’è un vertice v con grado *minore* di $\frac{n}{2}$, però poi (se vogliamo che la condizione imposta dal teorema sia verificata) bisogna che *tutti* i vertici ad esso non adiacenti abbiano grado *maggiore* di $\frac{n}{2}\dots$

Ah, e poi la condizione $gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n$ non deve mica essere verificata proprio da ogni coppia di vertici, ma soltanto da quelle coppie di vertici che non sono adiacenti. Sì, è formalmente un alleggerimento della condizione, ma in realtà non particolarmente significativo al momento di applicare il teorema.

Per oggi ci fermiamo qui, dopo aver sviscerato la caratterizzazione dei grafi euleriani (nell’ora precedente) non voglio insistere troppo sui grafi hamiltoniani; ci torneremo sopra nella prossima lezione.

Però se avete capito il teorema di Ore adesso siete in grado di stabilire per quali valori di h e k il grafo completo bipartito $\mathcal{K}_{h,k}$ risulta hamiltoniano (vi sarà utile anche il principio dei buchi di piccionaia, andatevelo a riguardare!). Vi do tempo fino a venerdì prossimo per ragionarci sopra!