Geometria e Algebra Computazionale

March 27, 2020

0.1 Esercizi di introduzione alle basi di Gröbner

1. Si trovi una base di Gröbner per l'ideale $I = (x^2 + y^2, xy) \subset \mathbb{Q}[x, y]$ (con vari ordini monomiali) e si trovino le espressioni degli elementi della base di Gröbner rispetto ai generatori.

   Soluzione:

   ```
   R=QQ[x,y,MonomialOrder=>GLex]
   I=ideal(x^2+y^2,x*y)
   gg=gens gb I
   quotientRemainder(gg, gens I)
   ```

2. Si trovi $\mathrm{MCD}(123456789, 987654321) = d$ e due interi a, b tali che $123456789a + 987654321b = d$. *Suggerimento:* Si usi gcd e quotientRemainder.

3. Si trovi una descrizione parametrica delle soluzioni del sistema

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

   Soluzione:

   ```
   R=QQ[x_1..x_4]
   A=matrix{{1,0,1,0},{0,1,0,-1},{1,2,3,4}}
   I=minors(1,A*transpose basis(1,R))
   gens gb I
   basis(1,R)%I
   ```

4. Si trovino i coefficienti a_i del polinomio $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ tale che $a(i) = (-1)^i i^2 + 1$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

   Suggerimento: Può essere utile introdurre l'anello

   ```
   R=QQ[a_0..a_4,x]
   ```

e la funzione

```
aa=i->sum(5,j->(a_j)*i^j)
```

Si consideri anche il comando

```
apply(5,i->(-1)^(i+1)*(i+1)^2+1)
```

5. Si trovi il MCD tra i polinomi $f = x^{16} - 4x^{12} + 6x^8 - 4x^4 + 1$ e $g = \sum_{i=0}^{9}(-1)^i x^i$ e due polinomi a, b tali che $af + bg$ è uguale al MCD.

   Suggerimento: Per calcolare il MCD può essere istruttivo procedere in modi diversi, ad esempio mediante il comando gcd(f, g)*, oppure mediante* gens gb(ideal(f, g))*, infine mediante* gens intersect(ideal(f), ideal(g))*. Per scrivere il polinomio g si può utilizzare il comando*

   ```
   g=sum(10,i->(-1)^i*x^i)
   ```

   Per calcolare a, b si può utilizzare quotientRemainder.

6. Si determini se $x^8 + y^8 - 1 \in (x^4 + y^4 - 1, x^2 - xy + y^2 - 1)$.

   Suggerimento: Si calcoli la forma normale mediante il comando %

0.2 Utilizzando il teorema di eliminazione

1. Si calcoli il primo ideale di eliminazione (eliminando a) dell'ideale $I = (a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$.

   Si risolva l'esercizio con due comandi diversi, la prima volta utilizzando eliminate *e la seconda volta utilizzando* gens gb *e l'ordine monomiale Lex.*

2. Dati $f = x^3 + 2xyz - z^2$, $g = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, si trovi il terzo ideale di eliminazione (eliminando (t, x, y)) dell'ideale I generato da $\frac{\partial f}{\partial x} - t\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} - t\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} - t\frac{\partial g}{\partial z}, g$.

   Queste equazioni intervengono cercando i punti critici di f sulla sfera che ha equazione $g = 0$, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

3. Dati $I = (x^2 - x + 1, y - 1)$ e $J = (x^3y + xy^3 - 2, x + y - 1)$ si calcoli $I \cap J$.

   Si risolva l'esercizio con due comandi diversi, la prima volta usando intersect *e la seconda volta utilizzando una variabile ausiliaria t e il Teorema di Eliminazione.*

4. Si calcoli MCD e mcm dei polinomi $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ e $g = x + y + z$.

5. In un triangolo di lati a, b, c,

   i) si esprimano le misure delle altezze h_a, h_b, h_c in funzione dei lati *Suggerimento: si usi la formula di Erone*

ii) si esprimano le misure dei lati in funzione delle altezze *Suggerimento: si usi l'eliminazione, la soluzione è*

$$a^2 = \frac{4h_a^2 h_b^4 h_c^4}{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)(h_a h_b - h_a h_c + h_b h_c)(-h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)}$$

$$b^2 = \frac{4h_a^4 h_b^2 h_c^4}{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)(h_a h_b - h_a h_c + h_b h_c)(-h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)}$$

$$c^2 = \frac{4h_a^4 h_b^4 h_c^2}{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)(h_a h_b - h_a h_c + h_b h_c)(-h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)}$$

iii)Si esprima l'area A in funzione delle altezze. *Soluzione:*

$$A^2 = \frac{h_a^4 h_b^4 h_c^4}{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)(h_a h_b - h_a h_c + h_b h_c)(-h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)}$$

iv) Si esprima il raggio del cerchio circoscritto R, il perimetro p e il raggio del cerchio inscritto r in funzione delle altezze *Soluzione:*

$$R = \frac{abc}{4A} = 2\frac{h_a^3 h_b^3 h_c^3}{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)(h_a h_b - h_a h_c + h_b h_c)(-h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)}$$

$$p^2 = 4\frac{h_a^2 h_b^2 h_c^2 (h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)}{(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)(h_a h_b - h_a h_c + h_b h_c)(-h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)}$$

$$r^2 = \frac{4A^2}{p^2} = \dots$$