Eq. differenziali lineari

Operatore lineare:

Considero un certo spazio di funzioni ex $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

ed un operatore $F: C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$f \to F(f)$$

mappa da $C^\infty \to C^\infty$

F è lineare se $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$

con $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Operatore differenziale $\partial_{x_i} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\partial_{x_i}(\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})) = \alpha \partial_{x_i} f(x) + \beta \partial_{x_i} g(x)$$

∂_{x_i} è lineare

$\Rightarrow \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ è lineare

Sia a_i costante che dipendente da x

Infatti $a(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f + \beta g) = \alpha a(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f + \beta a(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g$

analogamente

$a_{ij}(x) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ è lineare

operatore di derivazione del secondo ordine

a coeff. variabili

Operatori nonlineari

$F(f) = f^2 \Rightarrow F(f+g) = (f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$

$= F(f) + F(g) + 2fg$

quindi $F(f+g) \neq F(f) + F(g)$

analogamente $F(f) = f \, \partial_{x_i} f$ è non lineare

oppure $F = \partial_{x_i} f \, \partial_{x_j} f$, $\sin(f)$

Un'equazione differenziale è lineare $F(f) = 0$

se $F(f)$ è lineare inteso come operatore $C^\infty \to C^\infty$

Esempi

LINEARI	NON LINEARI
$\dfrac{\partial}{\partial x} f = 0$	$f \, \partial_x f = 0$
$\sin(x) \, \partial_x f = 3f$	$\sin(x) \, \partial_x f + f^2 = 0$
$(\partial^2_{x^2} + \partial^2_{y^2}) f = 0$	$(\partial^2_x + \partial^2_y) f + f \, \partial_x f = 0$
⋮	⋮

Equazioni rilevanti per il corso

Eq. Laplace $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = 0$

Eq. POISSON $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = -f$

nota

Eq. del calore $\frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i} u = 0$

Eq. Onde $\partial_t^2 u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$

Equazioni secondo ordine lineare ↑

Eq. del trasporto $\frac{\partial}{\partial t} u - \vec{g}(x) \cdot \vec{\nabla} u = 0$ LINEARE

Eq. di conserv. $\frac{\partial}{\partial t} u = F(u, \nabla u)$ non LIN.

Eq. Burgers $\partial_t u + u \partial_x u = 0$ non LIN