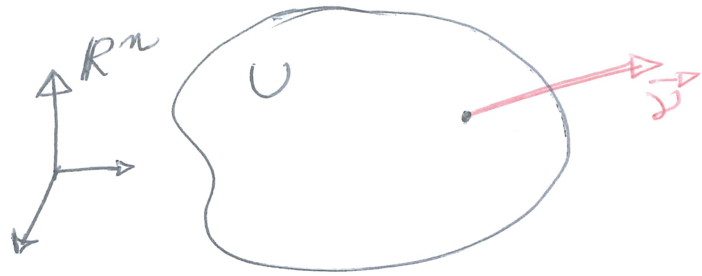
Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo un dominio U aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con bordo ∂U e $\vec{\nu} \in \mathbb{R}^n$ versore normale al bordo di U



Sia $\vec{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{u} \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$

con il simbolo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ ~~[illegible]~~ detto divergenza di u si intende

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\sum \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_j u_j \vec{e}_j \right)$$

$$= \sum_{ij}^{n} \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}_{\delta_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

NOTA $\quad \vec{u}(\vec{x})$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(x)$ è uno scalare

VALE (Th della divergenza)

$$\boxed{\int_U \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\, dV^n(x) = \int_{\partial U} \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{\nu}}_{=\sum_i u_i \nu_i}\, dS^{n}(x)}$$

E' utile considerare alcuni casi particolari del Th.d.

(1) $\vec{u} = \vec{e}_i\, \underset{\text{scalare}}{v}$: $\vec{u}$ è diretto ~~sempre~~ come il verso $\vec{e}_i$ fosse

$\vec{u}\cdot\vec{\nu} = v\,\nu_i$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$

otteniamo

$$\boxed{\int_U \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dV(x) = \int_{\partial U} v\,\nu_i\, dS(x)}$$

(2) $\vec{u} = \vec{\nabla} v = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$

$\hookrightarrow$ scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_j \vec{e}_j \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) =$$

$$\sum_{ij} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \Delta v$$

Otteniamo $\quad v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$

$$\boxed{\int_U \Delta v \, dV = \int_{\partial U} \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nu} \, dS}$$

Notazione $\quad \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nu} \doteq \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}}$ "derivata direzionale"

$$\| \quad \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \nu_i$$

③ $\vec{u} = \psi \vec{\nabla} \varphi$ $\qquad \underbrace{\psi, \varphi}_{\text{scalari}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\downarrow$
vettore

$$\vec{u} = \psi \sum_i \vec{e_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \nabla (\psi \vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi$$

$$= \underbrace{\vec{\nabla} \psi \, \vec{\nabla} \varphi}_{\sum_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} + \psi \Delta \varphi$$

Otteniamo

$$\int_U (\nabla \psi \vec{\nabla} \varphi + \psi \Delta \varphi) \, dV = \int_{\partial U} \psi (\nabla \varphi \cdot \hat{\nu}) \, ds$$

$$\boxed{\int_U \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi \, dV = - \int_U \psi \Delta \varphi \, dV + \int_{\partial U} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, ds}$$

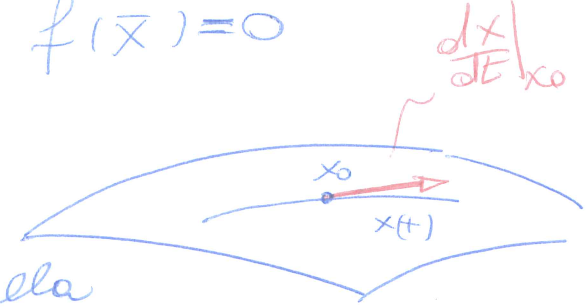
caso particolare $\vec{\nabla} \varphi = \vec{e_i} \, v$ campo vettoriale con direz. costante

Formula integrazione per parti $\qquad \psi, v \in C^0(\bar{U}) \cap C^1(U)$

$$\boxed{\int_U \frac{\partial \psi}{\partial x_i} v \, dV = - \int_U \psi \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dV + \int_{\partial U} \psi v \nu_i \, ds}$$

Risultato di ortogonalità

Consideriamo la superficie $f(\overline{x})=0$



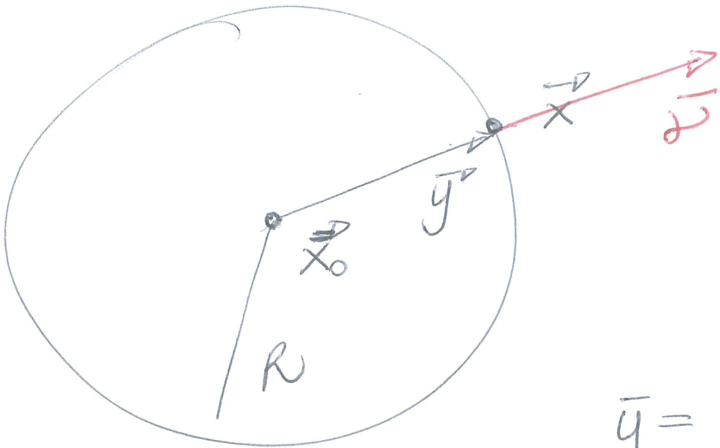
$x(t)$ una curva appartenente alla superficie $f(x(t))=0$

derivando rispetto a t $\Rightarrow$

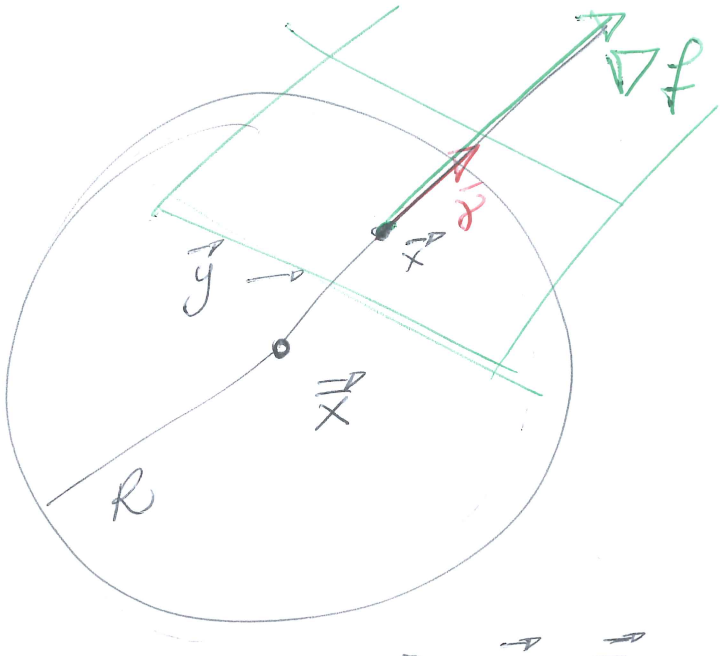
$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla} f \Big|_{x(t)} = 0$$

ho verificato che il gradiente ∇f è ortogonale alla tg di ogni curva con grafico appartenente alla superficie $f(x)=0$

$\Rightarrow \nabla f \Big|_{x_0}$ è ortogonale al piano tg alla superficie in x_0



$$\bar{y} = \vec{x} - \vec{\bar{x}}$$



$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\bar{x}}$$

$$\vec{x} \in \partial B(\bar{x}, R)$$

Calcolo della normale alla sfera

$$B(\bar{x}_0, R) = \sum (x_i - \bar{x}_i)^2 = R^2$$

$$f = \sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2 - R^2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \in B(\bar{x}, R)$$

La superficie B rappres. la curva di livello ϕ di f.

$$\vec{\nabla} f \perp B$$

$$\vec{\nabla} f = \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2 - R^2 \right) =$$

$$= \sum_{j,i} \left(\vec{e}_j \cdot 2 (x_i - \bar{x}_i) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{= \delta_{ij}} \right) =$$

$$= \sum_i 2 \vec{e}_i (x_i - \bar{x}_i)$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|} = \frac{\cancel{2} \sum \vec{e}_i (x_i - \bar{x}_i)}{\underbrace{\cancel{2} \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2}}_{= R \text{ siamo sulla sup. della sfera}}} = \frac{1}{R} \sum \vec{e}_i (x_i - \bar{x}_i)$$

$$\nu = \frac{\vec{y}}{|y|}$$

Formula della coarea (integ. in coord polari)

$$\underbrace{\int_{B(x_0,R)} u(x)\,dV(x)} = \int_0^R \left(\int_{\partial B(x_0,\rho)} u(x)\,dS(x) \right) d\rho$$

$$\frac{d}{dR} \qquad = \int_{\partial B(x_0,R)} u(x)\,dS(x)$$