Alcune proprietà della soluz. fondamentale ϕ

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(r) & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases} \qquad r = |x|$$

Sommabilità di ϕ attorno all'origine

$\boxed{\text{caso } n \geq 3}$

$\phi(r)$ diverge in $r=0$, valuto $\int_{B(0,R)} \phi \, dV(x)$

$$\int_{B(0,R)} \phi(x)\, dV(x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,R)} r^{2-n}\, dV(x)$$

F. coarea

$$\rightarrow \quad = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_0^R dr\, r^{2-n} \underbrace{\int_{\partial B(0,r)} dS(x)}_{\overset{\shortparallel}{|\partial B(0,R)| = n\alpha(n) r^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{n-2} \int_0^R r\, dr = \frac{R^2}{2(n-2)}$$

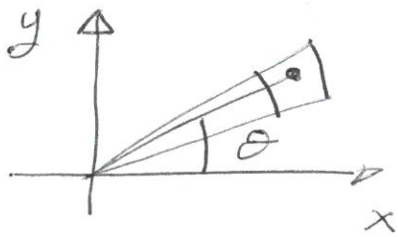
Quindi $\int_{B(0,R)} \phi\, dV = \frac{R^2}{2(n-2)} < \infty$ ma $\lim_{R\to\infty} \int \phi\, dV = \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi = +\infty$$

Caso $n=2$

$$\int_{B^2(0,R)} \phi(x,y)\,dx\,dy =$$

coordinate polari piane



$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$dx\,dy = \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{B^2(0,R)} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \ln(\rho)\,\rho\, d\theta\, d\rho =$$

$$= -\int_0^R \ln(\rho)\underbrace{\rho\, d\rho}_{D(\rho^2/2)} = -\ln(\rho)\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^R + \int_0^R \frac{1}{\rho}\frac{\rho^2}{2}\,d\rho$$

$$= -\ln(R)\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{4} < \infty$$

Concludendo $n \geq 2$

$$\int_{B(0,R)} \phi\, dV \begin{cases} < \infty \\ \to 0 \text{ se } R \to 0 \\ \to +\infty \text{ se } R \to +\infty \end{cases}$$

Proprietà 2 (caso $n \geq 3$)

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ limitata ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dV < \infty \quad e \quad \exists M \text{ t.c. } |f| \leq M$$

Verifichiamo che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\bar{y}) f(\bar{x}-\bar{y}) \, dV(y) < \infty$

qui $\bar{x}$ è fissata

Scrivo l'integrale come

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n - B(0,R)} \phi(y) f(x-y) \, dV(y)}_{= II} + \underbrace{\int_{B(0,R)} \phi(y) f(x-y) \, dV(y)}_{= I}$$

$$|I| \leq \int_{B(0,R)} |\phi(y)| \, |f(x-y)| \, dV(y) \leq M \int |\phi| \, dV < \infty$$

$II \Rightarrow$ considero $y \notin B(0,R)$ ovvero $|y| > R$

$$\phi|y| = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|y|^{n-2}} \leq \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{R^{n-2}}$$

Quindi $\displaystyle |II| \leq \int_{\mathbb{R}^n - B(0,R)} |\phi(y)| \, |f(x-y)| \leq$

$$|\mathrm{II}| \leq \frac{1}{n(n-2)R^{n-2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(0,R)} |f(x-y)|\,dV_y \leq$$

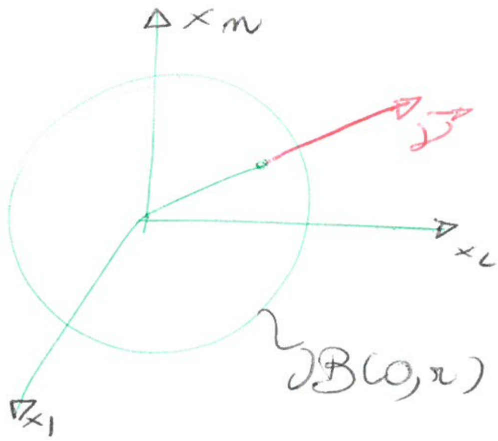
$$\leq \frac{1}{n(n-2)R^{n-2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dV(y)}_{\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dV_x}$$

$$|\mathrm{II}| \leq \frac{1}{n(n-2)R^{n-2}} \|f\|_{L^1} < \infty$$

$$\Rightarrow |\mathrm{I} + \mathrm{II}| \leq |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| < \infty$$

Gradiente soluzione fondamentale

Calcoliamo $\langle \vec{\nabla}\phi(x) \cdot \vec{\nu} \rangle \Big|_{\partial B(0,r)}$



$$\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_i}}_{= \frac{x_i}{r}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{x_i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Versore normale $\vec{\nu} = \frac{\vec{x}}{|x|} = \frac{\vec{x}}{r} = \sum_j \vec{e}_j \frac{x_j}{r}$

$$\langle \vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}\phi \rangle = \sum_{i,j} \langle \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \rangle \frac{x_i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{x_j}{r}$$

$$= \sum_i \frac{x_i^2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\boxed{\langle \vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}\phi \rangle = \frac{\partial \phi}{\partial r}}$$

Valutiamo esplicitamente

caso $n \geq 3$ $\quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial r} r^{2-n} =$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{n\,\alpha(n)\,r^{n-1}} = -\frac{1}{|\partial B(0,r)|}$$

caso $n=2$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \ln(r)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} = -\frac{1}{|\partial B(0,r)|}$$

$$\boxed{\text{Quindi} \quad \vec{\nu}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_{\partial B(0,r)} = -\frac{1}{|\partial B(0,r)|}}$$

Sommabilità di $\nabla\phi$ attorno all'origine

Calcoliamo $\displaystyle\int_{B(0,R)} |\nabla\phi|\,dV(x) = R$

abbiamo $|\nabla\phi|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{r^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2$

$$\Rightarrow |\nabla\phi| = \left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|$$

$$\int_{B(0,R)} |\nabla\phi|\,dV(x) = \int_{B(0,R)} \left|\frac{\partial\phi}{\partial r}(x)\right| dV(x) \overset{\text{coarea}}{=}$$

$$\int_0^R dr \left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right| \underbrace{\int_{\partial B(0,r)} dS(x)}_{|\partial B(0,r)|} = \int_0^R dr = R$$

Utilizziamo la soluz. fond. $\phi(x)$ per ottenere una soluzione esplicita (di tipo integrale) dell'equazione di Poisson $\Delta u = -f$ in $\mathbb{R}^n$

Premessa

$\phi(\vec{x})$ è armonica $(\Delta\phi = 0)$ in $\mathbb{R}^n - \{0\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \{x=0\}$

$\Rightarrow \underbrace{\phi(\vec{x} - \vec{y}_0)}_{\text{traslazione}} : \quad \Delta\phi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n - \{x = y_0\}$

Se considero la combinazione lineare

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \phi(\vec{x} - \vec{y}_i)\underbrace{f(y_i)}_{\text{coeff.}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_x u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n - \{\bar{x} = y_i \quad i = 1 \dots m\}$$

Cosa posso dire per il limite al continuo?

$$u(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\bar{x} - \bar{y}) f(\bar{y})\, dV(y)$$

Soluzione dell'equazione Poisson: formula integrale

Th: Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$\downarrow$

supp. compatto

considero $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\bar{x}-\bar{y}) f(\bar{y}) \, dV(\bar{y})$

esplicitamente $u = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \ln|\bar{x}-\bar{y}| \, f(\bar{y}) \, dV(\bar{y}) & n=2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} \, dV(\bar{y}) & n \geq 3 \end{cases}$

Si ha

1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

2) $\Delta u = -f \qquad x \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione: Punto 1

IDEA della dimostrazione

$z = x - y$

Basta osservare $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\bar{x}-\bar{y}) f(\bar{y}) dV(\bar{y}) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\bar{z}) f(\bar{x}-\bar{z}) dV(\bar{z})$$

$\downarrow$

$\bar{x}$ è costante nell'integrale $dV(\bar{y}) = dV(\bar{z})$

abbiamo verificato che $\int \phi(x-y) f(y) < \infty \Rightarrow u(x)$ è ben definito

$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} \int f(\bar{x}-\bar{z}) \phi(\bar{z}) dV(z)$$

tutto è regolare

$$= \int \underbrace{\partial_{x_i} f(x-z)}_{\text{ben definito, } f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)} \phi(\bar{z}) dV(z)$$

Utilizzo f per determinare la regolarità di u

NOTA: non posso usare questo argomento con ϕ

$$\partial_{x_i} u = \int \underbrace{\partial_{x_i} \phi(x-y)}\, f(y) dV(y)$$

ϕ è $C^2(\mathbb{R}-\emptyset)$ non so cosa succede quando $x=y$ nell'integrale (potrebbe non essere ben definito) ho utilizzato il fatto che u è scritto sotto forma di convoluzione fra ϕ e f

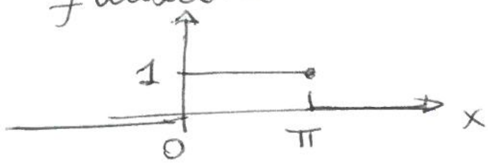
$$u(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\, f(y)\, dV(y)}$$

Def. di convoluzione $u = \phi * f$

In generale si ha che "la funzione eredita la regolarità della componente più regolare" del prod. di convoluzione.

Esempio in $\mathbb{R}$: consideriamo $\varphi = \text{sen}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\psi = \underbrace{\chi_{[0,\pi]}(x)}_{\text{funzione caratt.}}$$



$$u(x) = \varphi * \psi = \int_{\mathbb{R}} \text{sen}(y)\, \chi_{[0,\pi]}(x-y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \text{sen}(x-y)\, \chi_{[0,\pi]}(y)\, dy =$$

$$\int_0^\pi \text{sen}(x-y)\, dy = \cos(x-y)\Big|_0^\pi = \cos(x-\pi) - \cos(x)$$

$$= -2\cos(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Per la dimo di 1 ricordiamo

Teorema della convergenza dominata

Sia $h_n(y)$ una successione t.c.

$h_n(y) \xrightarrow{n \to \infty} h(y)$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$

e $|h_n(y)| \leq |\psi(y)|$ dove $\underbrace{\psi(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)}_{\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(y)| dV(y) < \infty}$

allora $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(y) dV(y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) dV(y)$

Applichiamo t.c.d. al nostro caso

Considero una succ. $\varepsilon_n > 0$ tc. $\varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

definisco $\delta w_n(x) \equiv \dfrac{w(x + \varepsilon_n \vec{e}_i) - w(x)}{\varepsilon_n}$

dove $w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \phi(y) dV(y)$

$$\delta w_n(x) = \int \underbrace{\frac{f(x-y+\varepsilon_n \vec{e}_i) - f(x-y)}{\varepsilon_n} \phi(y) dV(y)}_{h_n(y) \text{ del T.c.d.}}$$

$\vec{x}$ fissato

per la regolarità di f

$$\lim_{n\to\infty} h_n(y) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{f(\bar{x}-\bar{y}+\varepsilon_n \bar{e}_i) - f(x-y)}{\varepsilon_n}\right] \phi(y)$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x-y} \phi(y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\phi(y)}_{h(y) \text{ nel t.c.d.}}$$

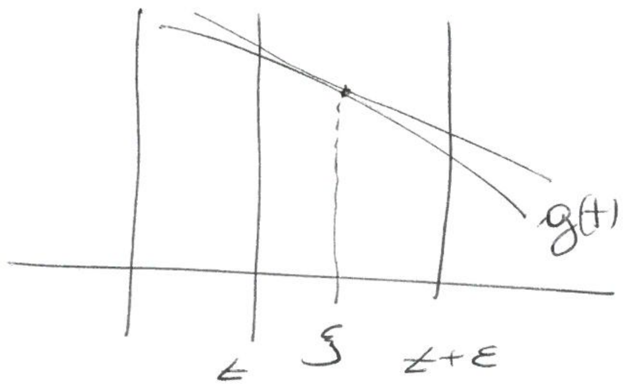
- Cerco una maggiorazione di h_n

$f \in C_0^2(\mathbb{R})$ supporto compatto

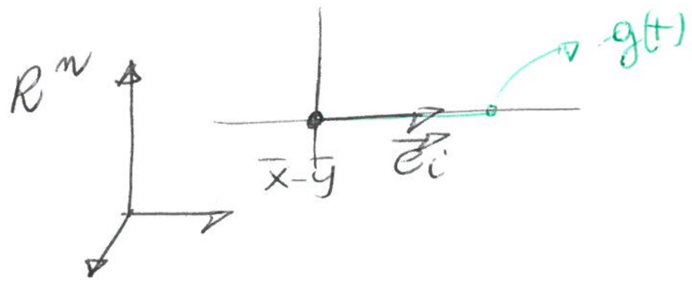
$\Rightarrow \exists\, R$ t.c. $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$

Ricordiamo il th. di Lagrange

Data $g(t) \in C^1(\mathbb{R})$, fissiamo $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, esiste $\xi \in [t, t+\varepsilon)$ t.c. $\dfrac{g(t+\varepsilon) - g(t)}{\varepsilon} = \dfrac{dg}{dt}(\xi)$



Definiamo $g(t) = \bar{x} - \bar{y} + t\vec{e}_i \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$



Consideriamo $\bar{f}(t) = f(g(t))$, per t. Lag. per $t=0$

$\exists\ \xi \in [0, \varepsilon_n)$ t.c. $\dfrac{f(g(0+\varepsilon_n)) - f(g(0))}{\varepsilon_n} = \dfrac{d\bar{f}}{dt}\Big|_{t=\xi}(\xi)$

ovvero $\exists\ \xi \in [0, \varepsilon_n)$: $\dfrac{f(\vec{x} - \vec{y} + \varepsilon_n \vec{e}_i) - f(\bar{x} - \bar{y})}{\varepsilon_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} - \bar{y} + \xi\vec{e}_i)$

Ottemiamo

$$h_n(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}-\vec{y}+\varepsilon_n\vec{e_i})\,\phi(y)\,\underbrace{\chi_{B(0,R)}(\bar{x}-\bar{y}+\xi\vec{e_i})}_{\text{ricorda supp. } f\subset B(0,R)}$$

Stimo $h_n(y)$

$$|h_n(y)| \le \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}_{\text{esiste perché } f\in C^1 \text{ supp. comp.}}\ |\phi(y)|\ \chi_{B(0,R)}(\bar{x}-\bar{y}+\xi\vec{e_i})$$

NOTA. dalla def. $\xi \to x-y$ quando $\varepsilon_n \to 0$

$\Rightarrow$ se $\bar{x}-\bar{y}+\xi\vec{e_i}\in B(0,R) \Rightarrow \bar{x}-\bar{y}\in B(0,2R)$
per R suff. grande
e ξ piccolo

quindi vale

$$|h_n(y)| \le \underbrace{\sup\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\ |\phi(y)|\ \chi_{B(0,2R)}(\bar{x}-\bar{y})}_{\psi(y) \text{ del t.c.d}}$$

Verifichiamo $\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(y)|\,dV(y) < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(y)|\,dV(y) = \sup\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \int_{\mathbb{R}^n}|\phi(y)|\,\chi_{B(0,2R)}(x-y)\,dV(y)$$

$$= \sup\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \int_{B(\cdot,2R)}|\phi(y)|\,dV(y) < \infty$$

Il t.c.d. ci garantisce che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n \, dV(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) dV(y)$$

abbiamo definito

$$\delta u_n = \frac{u(x+\varepsilon_n \vec{e_i}) - u(x)}{\varepsilon_n} = \int_{\mathbb{R}^n} h_n \, dV(y)$$

quindi $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(x+\varepsilon\vec{e_i}) - u(x)}{\varepsilon}$ esiste ed è

uguale a $\int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\,\phi(y)\,dV(y)$

e u è derivabile e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\,\phi(y)\,dV(y)$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per le deriv. successive trovo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\,\phi(y)\,dV(y)$$

$$\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

Dimostrazione punto 2: $\Delta u = -f$

Scrivo $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{x}-\bar{y})\, \phi(\bar{y})\, dV(y)$

ed isolo la singolarità di $\phi(y)$ nell'origine.

Fissato $\varepsilon > 0$

$$u(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} f(x-y)\, \phi(y)\, dV(y)}_{\text{Regolare}} + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} f(x-y)\, \phi(y)\, dV(y)}_{\text{con singol.}}$$

il punto 1 permette di calcolare il laplaciano

$$\Delta_x u = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Delta_x f(x-y)\, \phi(y)\, dV(y)}_{I} + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Delta_x f(x-y)\, \phi(y)\, dV(y)}_{II}$$

Stimo il termine II

$$|II| \le n \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right| \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} |\phi(y)|\, dV(y)}_{\sim O(\varepsilon^2)}$$

Quindi $|II| \to 0$ x $\varepsilon \to 0$

Consideriamo ora I

notiamo $\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$

derivata seconda, non c'è cambio di segno

Verifica $\frac{\partial}{\partial x} f(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y} f(x-y)$

$$I = \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \phi(y)\, \Delta_y f(x-y)\, dV(y)$$

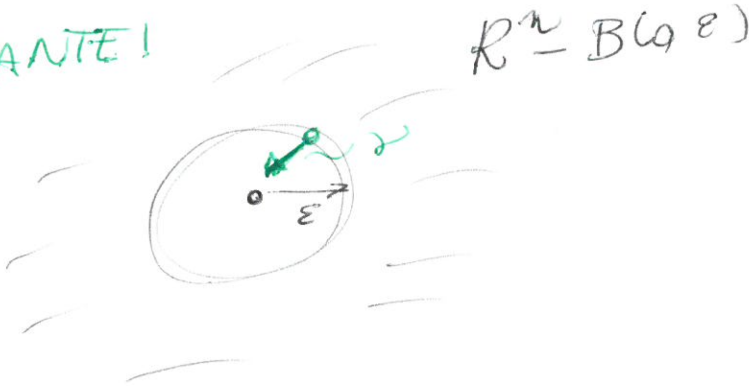
Teorema div. nella forma:

$$\int_U \nabla \psi \nabla \varphi + \int_U \psi \Delta \varphi = \int_{\partial U} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$$

Applichiamo con $\psi = \phi(y)$
$\varphi = f(x-y)$

$$I = \overbrace{-\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \nabla_y \phi(y)\, \nabla_y f(x-y)\, dV(y)}^{A} + \overbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)\, dS(y)}^{B}$$

NOTA: NORMALE ENTRANTE!



Stimo B

Utilizzando

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| = \left|\vec{\nu}\cdot\vec{\nabla} f\right| \leq \underset{\overset{\parallel}{1}}{|\vec{\nu}|}\ |\nabla f| \leq \sum_i \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$$

$$\doteq \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

$$|B| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\phi(y)|\, dS(y) =$$

$$= \|\nabla f\|_{L^\infty}\ |\phi(\varepsilon)|\ |\partial B(0,\varepsilon)|$$

$$= \|\nabla f\|_{L^\infty}\ |\phi(\varepsilon)|\ n\,\alpha(n)\,\varepsilon^{n-1}$$

$$|B| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\, n\alpha(n)\ \ln(\varepsilon)\ \varepsilon & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\ n\alpha(n)\ \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}} & n\geq 3 \end{cases}$$

Quindi $|B| \to 0$ se $\varepsilon \to 0$

Rimane l'ultimo termine A

$$A = -\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \nabla_y \phi(y)\, \nabla_y f(x-y)\, dV(y) = \text{Riapplico t. div}$$

$$= \cancel{\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \underbrace{\Delta_y \phi(y)}_{\Delta_y\phi = 0} f(x-y)\, dV(y)} - \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)}}_{\text{normale entrante}} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} f(x-y)\, dS(y)$$

$\Delta_y\phi = 0$ ho escluso la singolarità!

Fra le proprietà di ϕ avevo verificato

$$\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}\phi \Big|_{\partial B(0,r)} = - \frac{1}{|\partial B(0,r)|}$$ con normale uscente

adesso, nell'integrale ho normale entrante $\Rightarrow \nu \to -\nu$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{\nu}} \Big|_{\partial B(0,\varepsilon)} \doteq \nu \cdot \nabla \phi \Big|_{\partial B(0,\varepsilon)} = \frac{1}{|\partial B(0,\varepsilon)|}$$

$$A = - \frac{1}{|\partial B(0,\varepsilon)|} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS(y)$$

$$\doteq - \fint_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x)$$

per il Th di Lebesgue della media integrale

In conclusione

$$\Delta_x u = - f(x) + O(\varepsilon)$$ quindi la tesi

per l'arbitrarietà di ε

Attenzione:

Ignorare la singolarità di ϕ sull'origine, avrebbe portato ad un risultato (più semplice ma) sbagliato.

Ipotizzando

$$\Delta_x u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \phi(x-y)\, f(y)\, dV(y) \qquad (*)$$

come prima $\Delta_x \phi(x-y) = \Delta_y \phi$

$$\Delta_x u = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y \phi(y)\, f(x-y)\, dV(y)$$

ma $\Delta_y \phi(y)$ è <u>zero</u> quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \Delta_x u = 0 \;!$$

L'errore è in $(*)$: NON posso portare Δ_x dentro l'integrale; per la ϕ non riesco ad applicare il t.c.d. come ho fatto per f (mancanza di un maggiorante somm. per $\partial^2 \phi$)

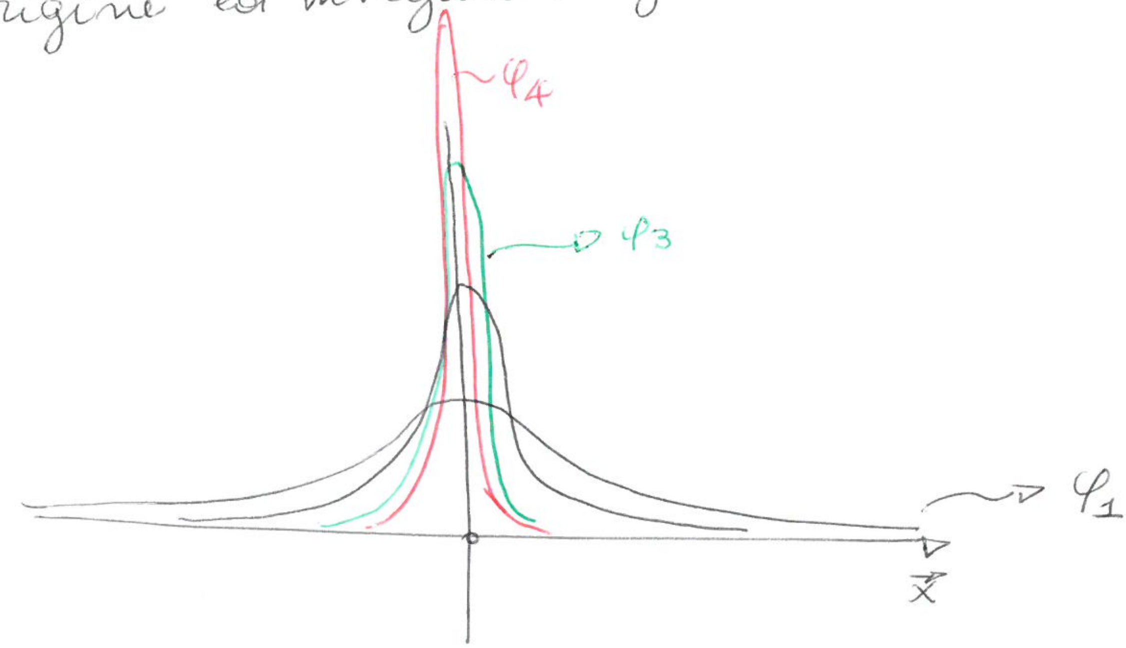
Si può dimostrare che $\Delta \phi$ non è una funz. bensì una distribuzione, in particolare coincide con la distrib. δ di Dirac (massa di Dirac)

$$\Delta_x \phi = -\delta(x)$$

Intuitivamente $\delta(x)$ è una "funzione"

t.c. $$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dV(x) = 1 \qquad \delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \boxed{+\infty \quad x = 0 \ \dots} \end{cases}$$

$\delta(x)$ va intesa come una successione di funzioni con supporto concentrato attorno all' origine ed integrale uguale ad 1



$$\delta(x) \sim \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

Quindi $$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\, f(x-y)\, dV(y) =$$

$$= f(x-y)\Big|_{y=0} = f(x)$$

da cui $$\Delta_x u(x) = \int \Delta_y \phi(y) f(x-y) = \int (-)\delta(y) f(x-y) = -f(x)$$

passaggio valido "nel senso delle distrib."