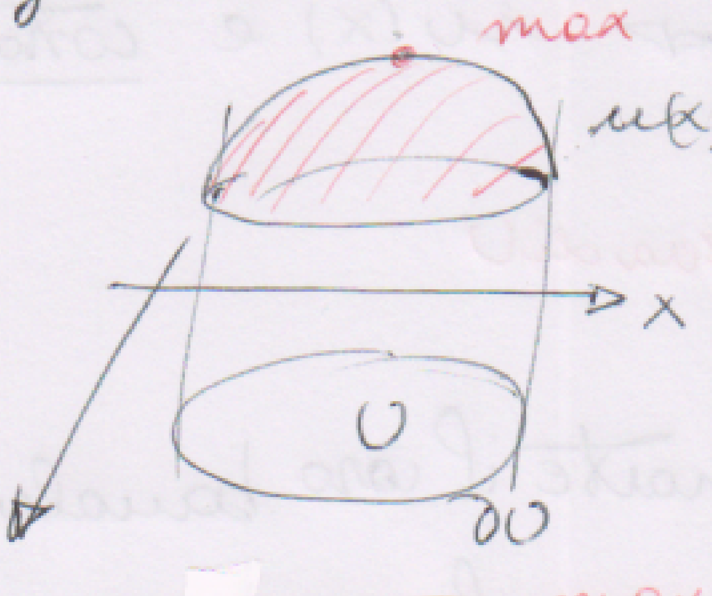
Principio del massimo (minimo) FORTE
per una funzione armonica

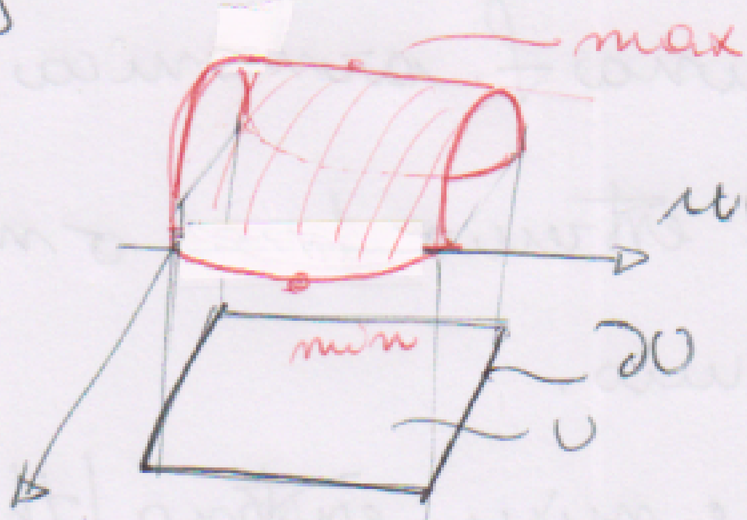
Il p.d.m. stabilisce che i valori estremi di una f. armonica (il max ed il minimo) si trovano <u>esclusivamente</u> sul bordo del dominio in cui la f. è armonica

Es.: $\mathbb{R}^2$

$u(x,y): \Delta u = 0$



$u(x,y) \Rightarrow$ NON armonica



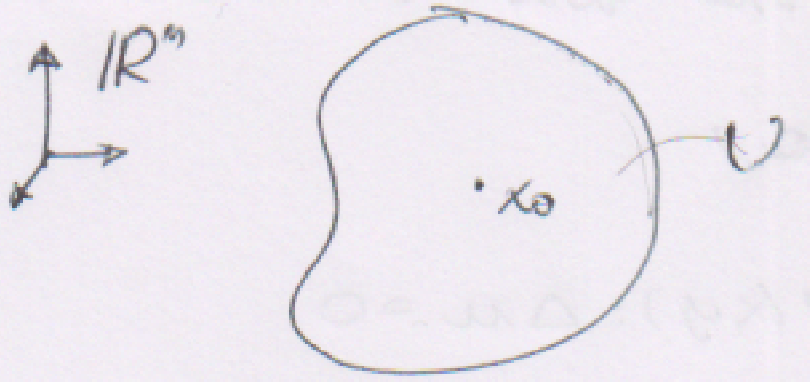
$u(x,y) \Rightarrow$ NON armonica

Teorema del massimo forte

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e connesso;

$\bar{U}$ compatto

Sia $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$: $\Delta u = 0$ per $x \in U$



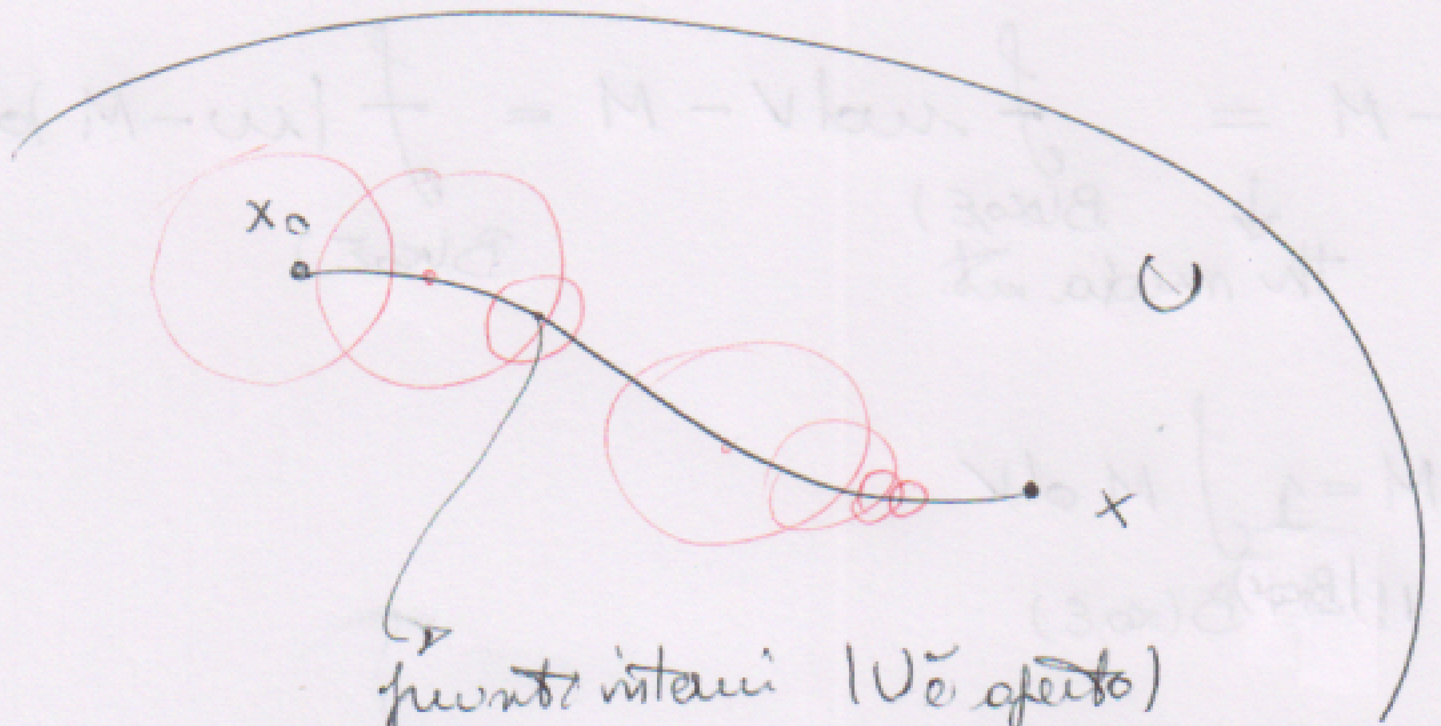
Supponiamo esista $x_0 \in U$ t.c.
$\downarrow$
punto interno ad U

$$u(x_0) = \max_{\underbrace{x \in \bar{U}}_{\text{includo la frontiera di } U}} u \Rightarrow u(x) \text{ è costante in } U$$

Il th mostra che, a parte il caso banale di una funzione costante, una f. armonica non può avere punti di estremo (max o min) all'interno del dominio.
Quindi, poiché max e min. esistono (th. Weierstrass.) questi devono essere localizzati esclusivamente sulla frontiera

Dimostrazione

Prendiamo un punto $x \in U$ arbitrario e dimostriamo $u(x) = u(x_0)$, quindi la funzione è necessariamente costante.



punti interni (U è aperto)
posso trovare palle centrate in ogni punto e contenute in U

Fissato x posso sempre trovare una curva $\gamma(t)$ con immagine contenuta in U t.c. $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(t) = x$
(U è aperto e connesso $\Rightarrow$ connesso per archi)

Procediamo così

1) Dimo che u è costante in ogni palla con centro $\in \gamma(t)$

2) Possiamo raggiungere x individuando una successione di palle intersecanti

Pt ① Uso che per Hp. xo è un massimo

$$M \equiv u(x_0) \geq u(x) \quad \forall x \in U$$

$$u(x) - M \leq 0 \quad \forall x \in U$$

Considero $B(x_0, \varepsilon) \subset U$

$$0 = u(x_0) - M = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} u \, dV - M = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} (u - M) \, dV$$

↓ th media int.

infatti $M = \frac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|} \int_{B(x_0,\varepsilon)} M \, dV$

$$\fint_{B(x_0,\varepsilon)} \underbrace{(u(y) - M)}_{\leq 0} \, dV(y) = 0$$

≤ 0 perché M è un massimo

Ho trovato che l'integrale di una funzione negativa o nulla deve essere $\emptyset \Rightarrow$ la funzione deve essere nulla q.o.

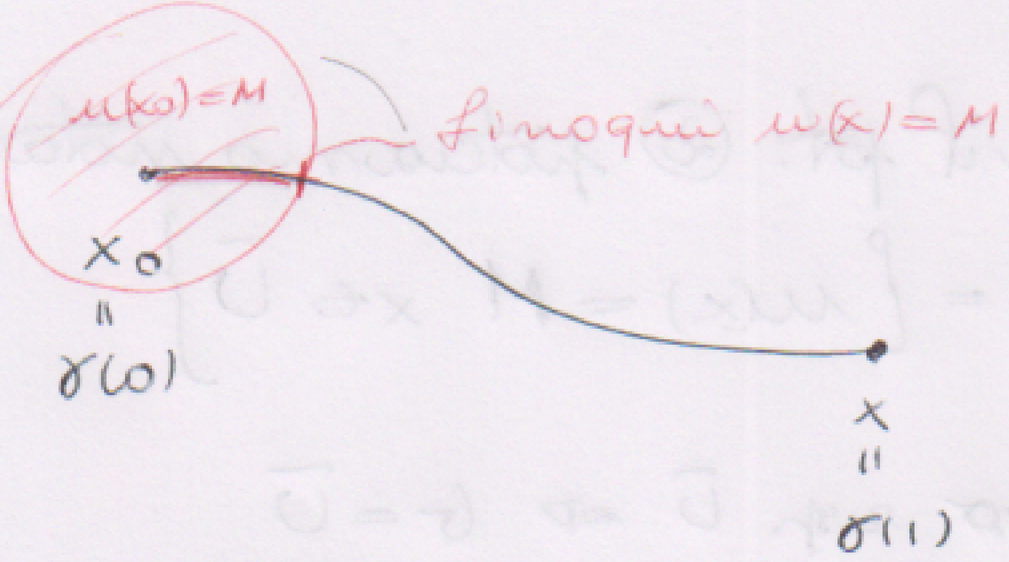
Es. $-\int |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ q.o.

Questa conclusione non varrebbe se la f. avesse la possib. di cambiare segno

$$\Rightarrow u(y) = M \quad \forall y \in B(x_0, \varepsilon)$$

Pt (2)

Devo garantire che concatenando palle con centro $\in \gamma$ posso arrivare da x_0 a x



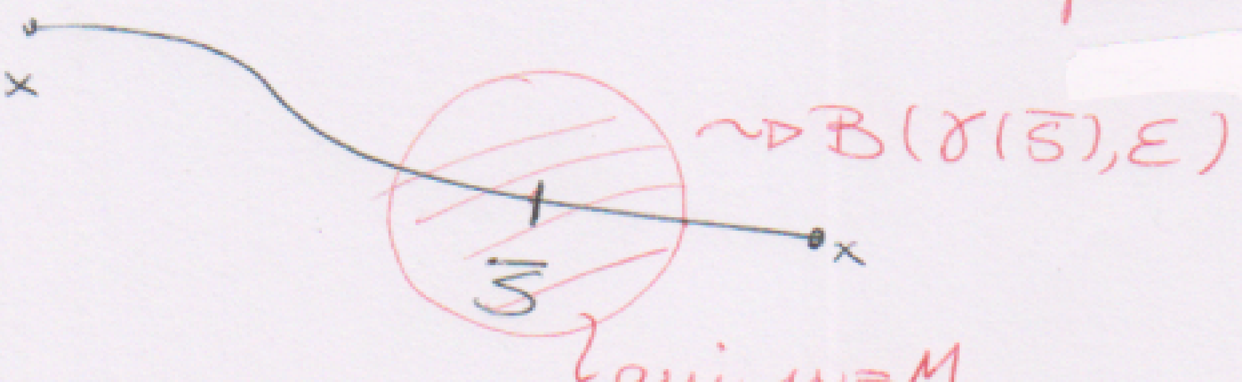
Considero $\bar{s} = \max\limits_{s\in[0,1]} \{ u(\gamma(s)) = M \}$

$\bar{s}$ esiste in quanto u è continua e $[0,1]$ è chiuso, quindi il massimo è raggiunto

Pt(2) $\Leftrightarrow$ $\bar{s} = 1$ Dimostro per assurdo

Hp $\bar{s} < 1 \Rightarrow \begin{cases} u(\gamma(s)) = M & s \leq \bar{s} \\ \underline{u(\gamma(s)) < M} & s > \bar{s} \end{cases}$

questo a rigore vale solo per un intorno dx di $\bar{s}$



quindi $u = M$ anche in intorno dx, $u(\gamma(s)) = M$ $s > \bar{s}$

questo contraddice il fatto che $\bar{s}$ sia il max della coordinata d'arco $\Rightarrow \bar{s} = 1$

ed ho dimostrato $u(x) = M \quad \forall x \in U$

In alternativa, per il pt. ② potevamo notare che l'insieme $G = \{u(x) = M \quad x \in \bar{U}\}$

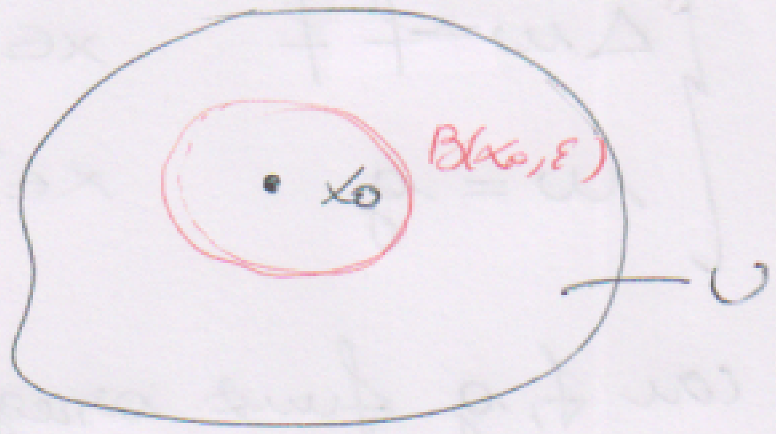
è sia aperto che chiuso risp. $\bar{U} \Rightarrow G = \bar{U}$

↳ controimmagine di cost. con f. continua

contiene palle in ogni pt.

Corollario del teorema di max forte

Se u è armonica in U, non può avere nemmeno massimi (o minimi) relativi



Applico il teorema sostituendo a U una palla di centro x_0 $\Rightarrow$ u cost nella palla, non può avere un estremo relativo non banale

Formulazione alternativa

Se u armonica in U e non costante

$$\forall x \in U \Rightarrow \quad \min_{x \in \partial U} u < u(x) < \max_{x \in \partial U} u(x)$$

Applicaz. del th. max/min.

Unicità di soluzione del prob. di Dirichlet (Poisson in dominio limitato, con valori al bordo assegnati)

Dirichlet $\Rightarrow$ $\begin{cases} \Delta u = -f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \end{cases}$

con f, g funz. assegnate

Dimo. Hp che il pr. Dir. abbia 2 soluzioni u, v. $\Rightarrow$ considero $w = u - v$

$\Rightarrow \quad \Delta w = \Delta u - \Delta v = -f + f = 0 \quad x \in U$

sul bordo $x \in \partial U \Rightarrow \quad w(x) = u - v\Big|_{\partial U} = 0$

Quindi w è armonica e $w\Big|_{\partial U} = 0$

$\Rightarrow \max_{x \in \partial U} w = \min_{x \in \partial U} w = 0$

$\Rightarrow$ 2 possib. 1: w costante $w = 0$
2: $0 < w < 0$ impos.

$\Rightarrow u = v$ cioè unicità di sol.

Stime (maggiorazioni) del valore di una funzione armonica e delle sue derivate

Sia data u: $\Delta u = 0$ in $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Valgono le seguenti stime

$x_0 \in \mathbb{R}^n$
$r \in \mathbb{R}^+$

1) : $$|u(x_0)| \leq \frac{1}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

2) $$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1} n}{\alpha(n) r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$i = 1 \dots n$

Dove $B(x_0, r) \subset U$

$$\|u\|_{L^1(B(x_0,R))} = \int_{B(x_0,r)} |u| \, dV$$

Dimostrazione:

1 segue immediatamente dal th della media

$$u(x_0) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x_0,r)} u \, dV$$, prendendo il v.a.

$$\left|\int u\right| \leq \int |u| \, dV$$

Punto 2

Notiamo che $\underbrace{\partial_{x_i} \Delta u = 0}$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \partial_{x_i} u = 0$$

quindi $g = \partial_{x_i} u$ è una f. armonica

Applico t. media a g $\quad g(x_0) = \fint_{B(x_0, r/2)} g \, dV$

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| = \left| \fint_{B(x_0, r/2)} \partial_{x_i} u \, dV \right| =$$

$$\left| \frac{1}{\alpha(n)(r/2)^n} \underbrace{\int_{B(x_0, r/2)} \partial_{x_i} u \, dV}_{\parallel \text{ teo. diverg.}} \right|$$

$$\int_{\partial B(x_0, r/2)} u \cdot \vec{\nu}_i \, dS$$

ho ottenuto

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x_0, r/2)} |u(y)| \, |\nu_i| \, dS(y)$$

nell' integrale $y \in \partial B(x_0, r/2)$ posso maggiorare

$$|u(y)| \leq \sup_{x \in \partial B(x_0, r/2)} |u(x)|$$

e $|\nu_i| \leq 1$ in quanto $|\vec{\nu}| = 1$

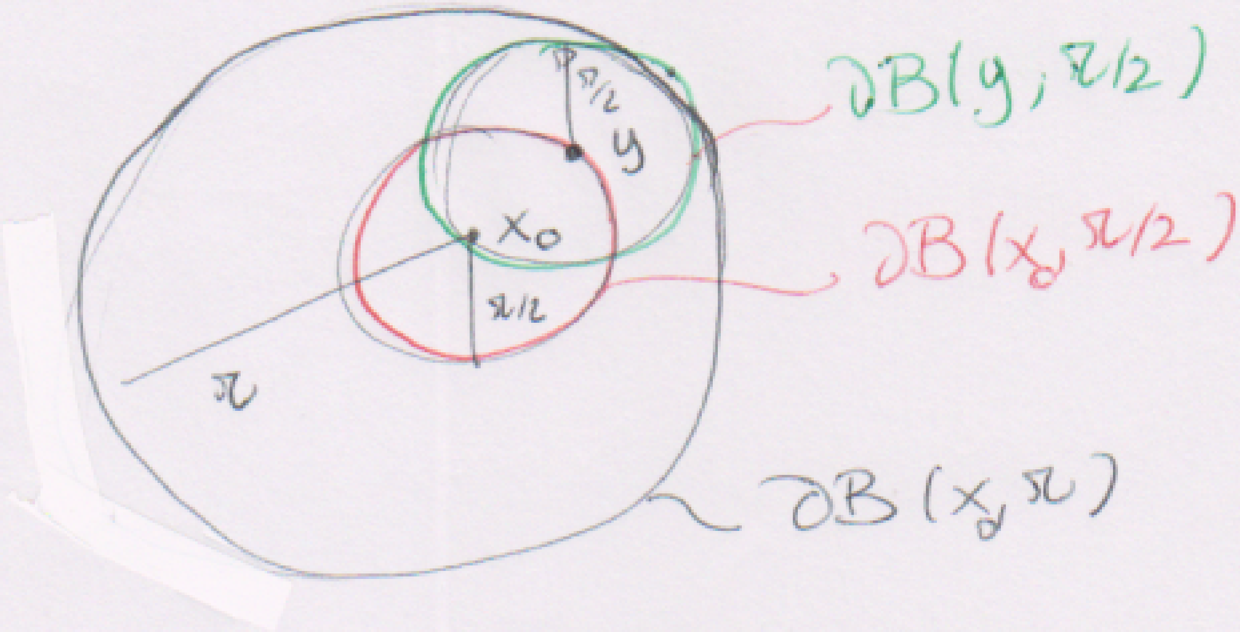
$$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \sup_{x \in \partial B(x_0, r/2)} |u(x)| \underbrace{\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \alpha(n) n}_{|\partial B(x_0, r/2)|}$$

$$= \frac{2n}{r} \sup_{x \in \partial B(x_0, r/2)} |u(x)| \quad (1)$$

Consideriamo adesso la stima ottenuta nel pt 1

con $x_0 \to y \in \partial B(x_0, r/2)$ e $r \to r/2$

$$|u(y)| \leq \frac{1}{\alpha(n) (r/2)^n} \|u\|_{L^1(B(y, r/2)}$$ *



Si verifica $B(y, r/2) \subset B(x_0, r)$ ho eliminato y

quindi $\|u\|_{L^1(B(y, r/2))} \leq \overbrace{\|u\|_{L^1(B(x_0, r))}}$

tornando a * e prendendo il sup

$$\sup_{y\in B(x_0,r/2)} |u(y)| \leq \frac{1}{\alpha(n)(r/2)^n} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Utilizzo questa esp. nella formula (1)

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{2n}{r} \frac{1}{\alpha(n)} \frac{2^n}{r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$$= \frac{2^{n+1}\, n}{r^n\, \alpha(n)} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Teorema di Liouville

Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armonica e limitata

$$\left(\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad \exists M : |u| < M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right)$$

$\Rightarrow$ u è costante

Dimostraz.

Dal teorema precedente

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1} n}{\alpha(n) r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

$$\leq \frac{2^{n+1} n}{\alpha(n) \, r^{n+1}} M \alpha(n) r^n =$$

$$= \frac{2^{n+1} n M}{r} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

quindi $\partial_{x_i} u(x_0) = 0 \quad \forall x_0$

$\nabla u(x) = 0$ sempre $\Rightarrow$ u è costante

(Ricorda $u \in C^\infty$)

Regolarità delle funzioni armoniche

Sia u: $\Delta u = 0$ in $x \in U \Rightarrow u \in C^\infty(U)$

Definizioni preliminari

"Mollificatori" $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

- $\eta(x) = \eta(|x|)$
- $\eta(x) = 0$ per $|x| \geq 1$
- $\eta(x) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$

L'insieme è non vuoto Ex: $\eta = \begin{cases} c\, e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$

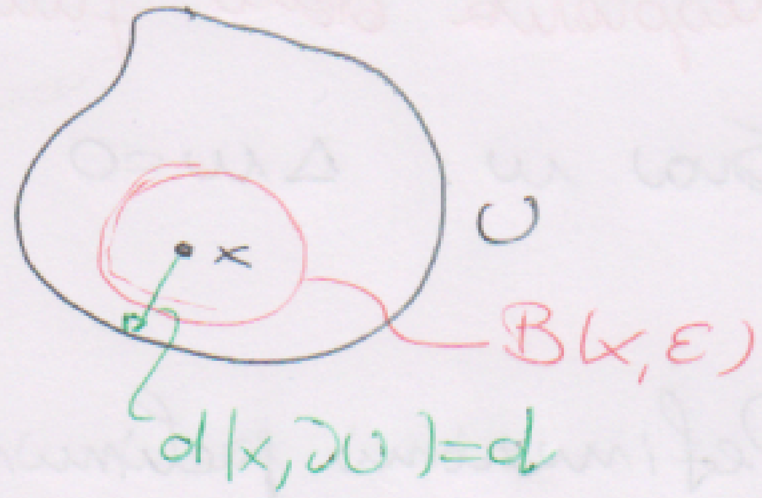
Definiamo $\underbrace{\eta^\varepsilon(x) \doteq \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon^n}}_{\text{scaling ...}}$ $\varepsilon > 0$

Si ha $\eta^\varepsilon(x) = 0$ $|x| \geq \varepsilon \Rightarrow$ supp. $\eta^\varepsilon(x) = B(0, \varepsilon)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(x)\, dV = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dV \overset{y = x/\varepsilon}{=} \int \eta(y)\, dV = 1$$

Dimo. Th reg. f. armonica

considero $x \in U$



e scelgo $B(x,\varepsilon) \subset U \quad | \varepsilon < d)$

Valuto $u^\varepsilon(x) \doteq \eta^\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dv(y)$

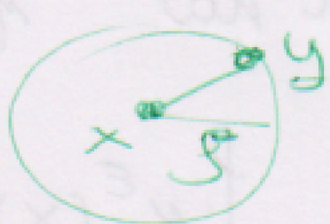
Poiché $\eta^\varepsilon \in C^\infty \Rightarrow u^\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Verifichiamo che $u(x) = u^\varepsilon(x)$

$$u^\varepsilon(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} \eta^\varepsilon(|x-y|)\, u(y)\, dv(y)$$

$$\text{Supp } \eta^\varepsilon(x-y) = B(x,\varepsilon)$$

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x,\rho)} \underbrace{\eta^\varepsilon(|x-y|)}_{|x-y| = \rho}\, u(y)\, dS(y) \right) d\rho$$



$$= \int_0^\varepsilon \eta^\varepsilon(\rho) \left(|\partial B(x,\rho)| \fint_{\partial B(x,\rho)} u(y)\, dy \right) d\rho$$

Poiché $\partial B(x, \rho) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$

u è armonica in $\partial B(x, \rho)$ $\quad 0 < \rho < \varepsilon$

$$\fint_{\partial B(x,\rho)} u(y)\, dS(y) = u(x)$$

$$u^{\varepsilon}(x) = u(x) \int_0^{\varepsilon} \eta^{\varepsilon}(\rho)\, |\partial B(x,\rho)|\, d\rho$$

$$= u(x) \int_0^{\varepsilon} \left(\eta^{\varepsilon}(\rho) \int_{\partial B(x,\rho)} dS(y) \right) d\rho =$$

$$= u(x) \int_{B(x,\varepsilon)} \eta^{\varepsilon}(y)\, dV = u(x)$$