Principio di max e min Debole

Sia u : U ap. loc. conn. si dice che

u soddisfa un princ. di max e(min) debole se

$\forall x \in U$ $\quad u(x) \leq \max\limits_{x \in \partial U} u \qquad$ MAX

$\quad u(x) \geq \min\limits_{x \in \partial U} u \qquad$ MIN

equivale a

$$\max_{u \in \overline{U}} u = \max_{u \in \partial U} u$$

$$\min_{u \in \overline{U}} u = \min_{u \in \partial U} u$$

Teorema del massimo debole

Sia $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso

t.c. $\Delta u \geq 0$

$$\Rightarrow \max_{x \in \bar{U}}(u) = \max_{x \in \partial U}(u)$$

Quindi u assume il suo massimo sul bordo.
Il teorema non impedisce però che u abbia massimo ANCHE nell'interno del dominio

Per Th. minimo debole $\Delta u \geq 0 \Rightarrow \Delta u \leq 0$

$\max \Rightarrow \min$

Notazione $\Delta u \geq 0 \Rightarrow u$. funz subarmonica

$\Delta u \leq 0 \Rightarrow u$ superarmonica

Prima di dimo. il Th max debole consideriamo un caso particolare (lemma utile per la dimo.)

$u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$

$\Delta u > 0 \qquad \forall x \in U$

$\Rightarrow \quad \forall x \in U : \quad u(x) < \max_{x \in \partial U} u$

ossia u <u>non</u> ha punti interni di max

Dimostrazione: Per assurdo

sia $x_0 \in U$ t.c. $u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u$

Nota: x_0 interno e il max lo calcolo in tutto $\bar{U}$

Calcolo $\partial^2_{(x_i)^2} u(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\partial_{x_i} u(x_0 + \varepsilon \vec{e_i}) - \partial_{x_i} u(x_0)}{\varepsilon}$

dove $\vec{e_i}$ versore relativo a asse x_i

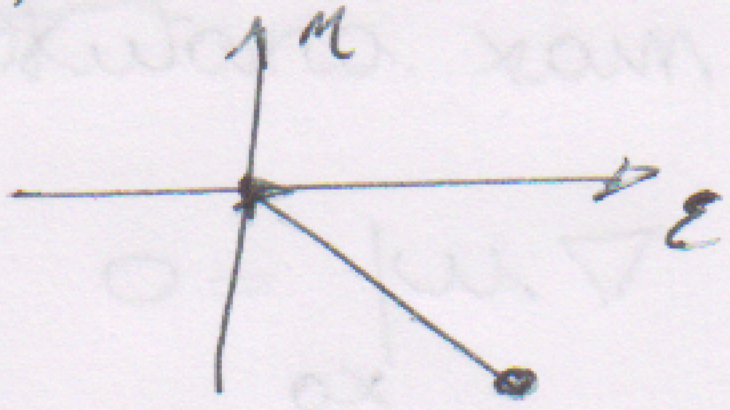
Utilizzando $\partial_{x_i} u(x_0 + \varepsilon \vec{e_i}) = \lim_{\eta \to 0} \dfrac{u(x_0 + \varepsilon \vec{e_i} + \eta \vec{e_i})}{\eta} - \dfrac{u(x_0 + \varepsilon \vec{e_i})}{\eta}$

ed analogo per $\partial_{x_i} u(x_0)$

$$\partial^2_{x_i^2} u(x_0) = \lim_{\varepsilon,\eta\to 0} \frac{1}{\varepsilon\eta}\Big[u(x_0+(\varepsilon+\eta)\vec{e_i}) - u(x_0+\varepsilon\vec{e_i})$$

$$- u(x_0+\eta\vec{e_i}) + u(x_0)\Big]$$

Per Hp il limite esiste $u\in C^2$, lo posso calcolare lungo la retta $\eta=-\varepsilon$



$$\partial^2_{x_i^2} u(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} (-)\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\overbrace{u(x_0)-u(x_0+\varepsilon\vec{e_i})}^{\ge 0}$$

$$\underbrace{+u(x_0)-u(x_0-\varepsilon\vec{e_i})}_{\ge 0}\Big]$$

$$\Rightarrow \partial^2_{x_i^2} u(x_0)\le 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \partial^2_{x_i} u(x_0) = \Delta u(x_0)\le 0 \quad \text{contro Hp } \Delta u>0$$

Quindi il $\max_{x\in\bar{U}} u$ <u>non</u> è assunto da un punto interno, ma nella chiusura il max esiste quindi deve appartenere al bordo

$$\Rightarrow \max_{x\in\bar{U}} u = \max_{x\in\partial U} u \quad \text{e} \quad \forall x\in U \ u(x) < \max_{x\in\partial U} u$$

Il teorema può essere dimostrato in un altro modo

Dim 2: ipotizzo sempre per assurdo che esista

$$x_0 \in U \text{ t.c. } u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u$$

x_0 max assoluto $\Rightarrow$ x_0 è un max relativo

$\Rightarrow \nabla u|_{x_0} = 0$ e la matrice Hessiana

$Hu|_{x_0}$ è semidef. negativa

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1x_1} u & \partial^2_{x_1x_2} u & \dots & \partial^2_{x_1x_n} u \\ \partial^2_{x_1x_2} u & & & \\ \vdots & & & \\ \partial^2_{x_1x_n} u & \dots & & \partial^2_{x_nx_n} u \end{pmatrix}$$

$H(x_0)$ semid. negat $\Rightarrow$ tutti gli autovalori $\lambda_i \leq 0$

H è simm. $\Rightarrow$ diagonalizz. e

$\text{tr.}\, H|_{x_0} = \sum_i^n \lambda_i$ (la traccia è un invariante per diagonalizz.)

$$\text{tr}\, H|_{x_0} = \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j} u = \Delta u = \sum \lambda_i \leq 0 \text{ assurdo}$$

Dimostriamo adesso Th max debole

ovvero $\Delta u \geq 0 \quad x \in U$

$$\forall x \in U \Rightarrow u(x) \leq \max_{x \in \bar{U}} u = \max_{\partial U} u$$

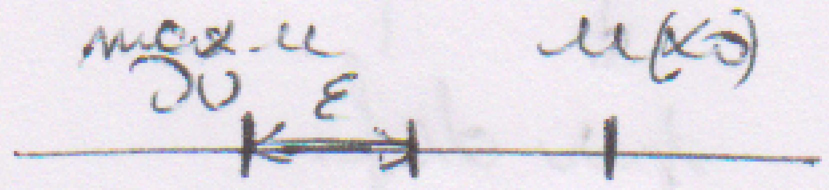
Nota, rispetto al caso prec. ho $\leq$

Dimostro per assurdo

Hp $\exists\, x_0 \in U$ t.c. $u(x_0) > \max_{x \in \partial U} u$

posso quindi trovare $\varepsilon > 0$ suff. piccolo t.c.

$$u(x_0) > \max_{x \in \partial U} u + \varepsilon \quad *$$



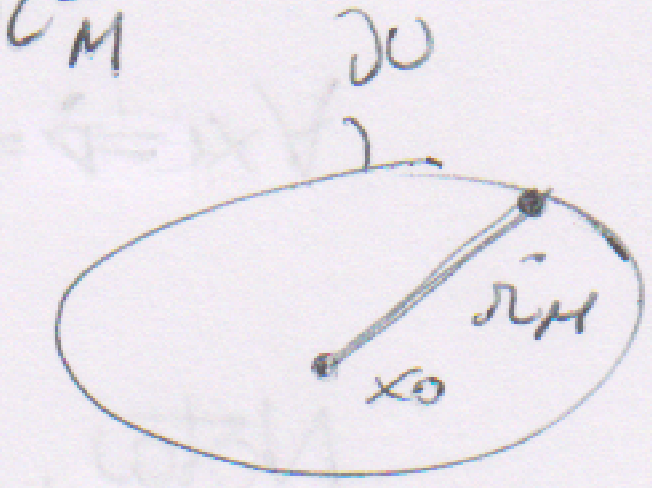
Considero la funzione ausiliaria

$$v(x) = u(x) + \sigma \underbrace{|x - x_0|^2}_{\equiv r} \quad \text{con } \sigma \text{ da determinare}$$

usando $v(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow \max(v) \leq \max(g) + \max(h)$

(questo perché in generale il max g non è raggiunto per la stessa x per cui $h(x)$ ha massimo)

$$\max_{x\in\partial U} v(x) \le \max_{x\in\partial U} u(x) + \sigma \underbrace{\max_{x\in\partial U} |x-x_0|^2}_{= r_M^2}$$



adesso scelgo σ t.c. $0 < \sigma < \dfrac{\varepsilon}{r_M^2}$

$$\Rightarrow \max_{x\in\partial U} v(x) \le \max_{x\in\partial U} u + \varepsilon$$

$$v(x_0) = u(x_0) \overset{*}{>} \max_{x\in\partial U} u(x) + \varepsilon \ge \max_{x\in\partial U} v$$

per def.

ho trovato $x_0 \in U$, quindi $x_0 \notin \partial U$

t.c. $v(x_0) \ge \max_{x\in\partial U} v$ (1)

calcolo $\Delta v = \Delta u + \sigma \Delta |x-x_0|^2 \ge \sigma \Delta |x-x_0|^2$ $\quad$ ($\Delta u \ge 0$)

calcoliamo $\partial_{x_i} |x-x_0|^2 = 2(x_i - x_{0,i})$

$\partial^2_{x_i} |x-x_0|^2 = 2$

$\Delta |x-x_0|^2 = 2n$

$\Delta v \ge 2n\sigma > 0 \Rightarrow \Delta v > 0$ ma (1) contradd. lemma