Possibile utilizzo della formula integrale appena trovata. Potrebbe essere utilizzata per ottenere la soluzione del seguente problema di Poisson in dominio limitato

$$\begin{cases} \Delta u = -f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h & x \in \partial U \end{cases}$$

Si dimostra però che $u, \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ su ∂U non sono in generale indipendenti, posso prescrivere 1 sola delle 2 condizioni ex $u = g$ in ∂U (condizione Dirichlet).

Definendo la f. di Green riesco ad ottenere una formula simile, che non contiene $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$

Definisco la funzione ausiliaria

$\varphi^{x}(\bar{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

↳ variabili

lo considero un parametro fissato

Ammetto che $\varphi^{\bar{x}}(\bar{y})$ sia la soluz. del seguente problema Lapl.-Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_y \varphi^{\bar{x}}(\bar{y}) = 0 & y \in U \quad x \in U \\ \varphi^{x}(\bar{y}) = \phi(\bar{x}-\bar{y}) & y \in \partial U \end{cases}$$

Quindi, richiedo che φ^{x} sia armonica in tutto U.

Nota: $\varphi^{x}(y) \neq \phi(\bar{x}-\bar{y})$! Apparentemente

sembrerebbe lecito scegliere $\varphi^{x}(y) = \phi(x-y)$ infatti

$$\begin{cases} \Delta_y \phi(x-y) = 0 \\ \phi(x-y) = \phi(x-y) & y \in \partial U \end{cases}$$

questo però NON vale $\forall y \in U$

proprio x la singol. di ϕ in $y = x$

Riprendo la formula iniziale (Th div.)

$$0 = \int_U (v \Delta_y u - u \Delta_y v) \, dV(\bar{y}) + \int_{\partial U} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(y)$$

Scelgo $x \in U$ e $v(y) = \varphi^x(y)$

$$0 = \int_U \left(\varphi^x(y) \Delta_y u - u \cancel{\Delta_y \varphi^x(y)} \right) dV(y) +$$

$$+ \int_{\partial U} \left(u \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu} - \underbrace{\varphi^x}_{= \phi(x-\bar{y})} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(y)$$

Ottengo

$$\int_U \varphi^x \Delta_y u \, dV(y) + \int_{\partial U} \left(u \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu} - \phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(y) = 0 \quad *$$

Prendo la formula integrale per $u(x)$ ottenuta precedentemente e sommo a $*$

$$u(x) = \int_U (\varphi^x(y) - \phi(x-y)) \Delta_y u \, dV(y) +$$

$$+ \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} (\varphi^x - \phi(x-y)) \, dS(y)$$

ho eliminato il termine $\int_{\partial U} \phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y)$

Definiamo: funzione di Green

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi(\bar{y}-\bar{x}) - \varphi^{x}(\bar{y})$$

Si ottiene

$$\boxed{u(\bar{x}) = -\int_U G(x,y)\, \Delta_y u(y)\, dV(y) - \int_{\partial U} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \nu}}_{= \vec{\nabla}_y G(\bar{x},\bar{y}) \cdot \vec{\nu}(\bar{y})}(x,y)\, u(y)\, dS(y)}$$

Quindi, una volta conosciuta la $G(\bar{x},\bar{y})$ la formula preced. può essere utilizzata per ottenere la soluzione del prob. Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \end{cases}$$

$$u(x) = \int_U G(x,y) f(y)\, dV(y) - \int_{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \nu}(\bar{x},\bar{y})\, g(y)\, dS(y)$$

NOTA: $G(x,y)$ non dipende da f e g ma solo dal dominio U: si calcola una volta ~~sola~~ per ogni dominio