Riassunto metodo H-J.

Sistema meccanico con n g.d.l. (dimensione dello spazio delle configurazioni

Spazio degli stati $(q, \dot{q})$ Individuo lo stato dinamico del sistema: $2n+1$ parametri per individ. esattamente lo stato $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \in R^{2n+1}$

Descrizione Lagrangiana: $L(q, \dot{q}, t) = T - U$

Eq. di E-L. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ $i = 1 \dots n$

Descrizione Hamiltoniana: $\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \in R^n$

In generale $p \leftrightarrow \dot{q}$ è un legame invertibile

$p = p(q, \dot{q}, t)$ oppure $\dot{q} = \dot{q}(p, q, t)$ ottenuto

invertendo $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t)$

Def. di Hamiltoniana e spazio delle fasi

Spa. fasi: $(q, p, t) \in R^{2n+1}$ spazio in cui al posto di $\dot{q}$ ~~ho~~ utilizzo il mom. generalizzato p

Spazi equivalenti

$$\underset{R^{2n+1}}{(q, \dot{q}, t)} \longleftrightarrow \underset{R^{2n+1}}{(\bar{q}, \bar{p}, t)}$$

Funzione di Hamilton

$$\mathcal{H} = \bar{p}\cdot\dot{\bar{q}} - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\Big|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)} = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(p,q,t)$$

Il sistema meccanico è rappresentato da una traiettoria nello spazio delle fasi $(q(t), p(t))$ $t: [0, T)$

Ottenuta risolvendo le Eq. di Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{p}}(q(t), p(t))$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{q}}(q(t), p(t))$$

Cambio di coordinate:

Rappresento la dinamica del sistema "vista da un nuovo osservatore" che descrive il sistema con le sue variabili $(Q, \dot{Q}, t)$ nello spazio degli stati o equiv. con (Q, P, t) nello spazio delle fasi.

Poiché nuovo e vecchio osservatore descrivono lo stesso sistema fisico, sarà in linea di principio possibile esprimere le coord. gener. di 1 sistema con quelle dell'altro, sia nello spazio degli stati che nello spazio delle fasi

$(Q, \mathring{Q}) = (Q(q, \mathring{q}, t), \mathring{Q}(q, \mathring{q}, t))$

$(Q, P) = (Q(q, p, t), P(q, p, t))$

e analog.

$(q, \mathring{q}) = (q(Q, \mathring{Q}, t), \mathring{q}(Q, \mathring{Q}, t))$

$(q, p) = (q(Q, P, t), p(Q, P, t))$

Insieme a Ham e Jacobi ci chiediamo se sia possibile trovare un nuovo osservatore per cui la din. Ham. sia particolarmente semplice, ovvero per cui $H'(Q, P, t) = 0$

in questo caso $P = \text{cost.}$ $Q = \text{cost}$

La teoria delle trasformaz. canoniche garantisce che il legame fra nuova (H') e vecchia (H) Hamiltoniana è dato dalla semplice espressione

$$H'(\bar{P}, \bar{Q}, t) = H(\bar{p}, \bar{q}, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(\bar{q}, \bar{P}, t)$$

Dove S, la funzione generatrice della trasformazion è arbitraria (a patto di rispettare alcuni vincoli che permettono al prob. di essere ben definito)

S fornisce inoltre, in maniera implicita (indiretta) le equazioni che legano fra di loro le coordinate nei 2 sist. di rif.

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, P, t) \Rightarrow P = P(q, p, t)$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q, P, t) \Rightarrow Q = Q(q, p, t)$$

Imponendo che $H' = 0$ si ottiene l'eq. H-J

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \qquad \text{I ordine non lineare}$$

Un'ampia classe di problemi possono essere risolti col metodo della separaz. delle variabili che fornisce la soluz. per integrazione diretta delle equaz.

Ansatz $\quad S(q_1, q_2, \dots q_n, t) = S_0(t) + \sum S_i(q_i)$

1) H non dip. dal tempo

$$\Rightarrow \frac{dS_0}{dt} = -H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) \Rightarrow \frac{dS_0}{dt} = -\beta_0 \qquad H = \beta_0$$

$$S_0 = -\beta_0 t$$

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = \beta_0$$

Hamilt. a variabili separabili

$H = \sum H_i \left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)$

$$\underline{\sum H_i \left(q_i, \frac{dS_i}{dq_i}\right)} = \beta_0$$

Somma di f. di variab. diverse

n probl del tipo $H_i \left(q_i, \frac{dS_i}{dq_i}\right) = \beta_i \to$ costante

invertendo trovo $\frac{dS_i}{dq_i} = F_i(\bar{\beta}, q_i)$ ⇝ in generale F_i dipende da tutte le costanti

$\sum \beta_i = \beta_0$

Integro per quadrature $\underline{S_i = \int^{q_i} F_i(\bar{\beta}_i, q_i) dq_i}$

può essere complicato ma è esplicito (non ho bisogno di calcolarlo....)

Soluz. prob. H-J

$$\boxed{S = -\beta_0 t + \sum_i \int^{q_i} F_i (\bar{\beta}_i, q_i) dq_i}$$

Quindi la soluzione dipende da n costanti β_i

adesso IMPONGO $P_i = \beta_i$

$\to$ nuovi impulsi (tanto so che sono costanti)

L'equazione del cambio di variabili porta

$$\underset{\text{costante!}}{\underset{\downarrow}{Q_i}} = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \beta_i} = \frac{\partial}{\partial \beta_i} \sum_j \int^{q_i} F_j (q_j, \bar{\beta}) dq_i$$

Inoltre, spesso conviene scegliere uno dei momenti coniugati uguale a β_0

$$Q_0 = \frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -t + \frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_j \int^{q_j} F_j (q_j, \bar{\beta}) dq_i$$

Nota: ho $n+1$ costanti β: $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n$ e solo n momenti P_i; ~~posso scegliere di eliminare una costante~~ Le β non sono indipendenti

$$\beta_0 = \sum \beta_i$$

Interpretazione della funzione S di $E-L$.

Vediamo il significato fisico della soluzione

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

in cui ricordiamo $\quad S = S(\bar{q}, \bar{P}, t)$

"vecchie" posiz. "nuovi" momenti, costanti

$$e \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Calcoliamo la derivata totale di S

$$\frac{dS}{dt} = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$$

le P_i sono costanti $\Rightarrow$ $\dot{P}_i = 0$, mentre $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$ e $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L$$

Quindi $\quad S = \int^t L(q, p, t)\, dt \quad$ coincide con l'azione

Hamiltoniana utilizzata nel principio di Hamilton