Richiami di algebra multilineare

Siano V e W spazi vettoriali

$\mathrm{Hom}(V,W) \overset{\text{def}}{=} \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare} \}$

$\dim V = n$ $\dim W = m$ $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = n \cdot m$

$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ è lo spazio DUALE di V

V vettori — pensiamo allo spazio tangente T_xM $x \in M$

V^* co-vettori — pensiamo allo spazio cotangente o delle 1-forme T^*_xM $x \in M$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V

la base duale $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ di

V^* è definita da

$$\alpha_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

questa è una base di V^*

ogni $f \in V^*$ si scrive

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\,\alpha_i$$

viceversa $\forall\, v \in V$ $\quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v)\, v_i$

<u>OSS</u> V e V^* sono isomorfi ma non canonicamente.

Mentre V e V^{**} sono isomorfi canonicamente $\quad (V^*)^* = \{\varphi : V^* \underset{\text{lineari}}{\to} \mathbb{R}\}$

$$V \longrightarrow V^{**}$$

$$v \longmapsto \underbrace{\{f \longmapsto f(v)\}}_{V^* \longrightarrow \mathbb{R}}$$

Permutazioni: una permutazione è una applicazione biunivoca

$\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$

σ è pari se si ottiene componendo un numero pari di scambi

σ è dispari altrimenti

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

TENSORI

Def Un tensore ϕ è una applicazione multilineare

$$\phi : \underbrace{V \times \quad \times V}_{r \text{ volte}} \times \underbrace{V^* \times \quad \times V^*}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'ordine covariante di ϕ è r

" controvariante di ϕ è s

$$\mathcal{T}^r_s(V) = \{ \phi \text{ tensore come sopra} \}$$

spazio vettoriale

di dimensione n^{r+s}

Def

Sia $F_* : V \longrightarrow W$ lineare

allora $F^* : \mathcal{T}^r(W) \longrightarrow \mathcal{T}^r(V)$ lineare

$$\boxed{(F^*\phi)(v_1, \dots, v_r) \overset{def}{=} \phi(F_* v_1, \dots, F_* v_r)}$$

in particolare

$$\boxed{F^* : \mathcal{T}^1(W) = W^* \longrightarrow \mathcal{T}^1(V) = V^*}$$

$$f \longmapsto F^*(f)$$

$$F^*(f) : v \longrightarrow f(F_* v)$$

Tensori simmetrici e antisimmetrici

Def $\phi \in \mathcal{T}^r(V)$ è SIMMETRICO

se, $\forall$ $i, j \in \{1, \dots, r\}$

$$\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) =$$
$$\phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r)$$

$\phi \in \mathcal{T}^r(V)$ è ANTISIMMETRICO

o alternante se $\forall$ i, j

$$\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) =$$
$$-\phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r)$$

i tensori covarianti alternanti si dicono anche forme esterne.

Denotiamo con

$$\Sigma^r(V) = \{ \phi \in \mathcal{C}^r(V) \mid \phi \text{ simmetrico} \}$$

$$\Lambda^r(V) = \{ \phi \in \mathcal{C}^r(V) \mid \phi \text{ antisimmetrico} \}$$

↑ sottospazi vettoriali di $\mathcal{C}^r(V)$

$\dim \Sigma^r(V) = \binom{n+r-1}{r}$ $\quad$ $\dim \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$

simmetrizzatore:

$$\mathcal{S} : \mathcal{C}^r(V) \longrightarrow \mathcal{C}^r(V)$$

$$(\mathcal{S}\phi)(v_1, \dots, v_r) =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})$$

↑ permutazioni su $\{1, \dots, r\}$

alternatore:

$$\mathcal{A}: \mathcal{T}^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}^r(V)$$

$$(\mathcal{A}\phi)(v_1, \dots, v_r) =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})$$

permutazioni su $\{1, \dots, r\}$

Proprietà:

1. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$ sono proiezioni, ossia $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ e $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$

2. $\mathcal{A}(\mathcal{T}^r(V)) = \Lambda^r(V)$

   $\mathcal{S}(\mathcal{T}^r(V)) = \Sigma^r(V)$

3. ϕ è alternante se e solo se $\mathcal{A}(\phi) = \phi$

   ϕ è simmetrico se e solo se $\mathcal{S}(\phi) = \phi$

4. se $F_* : V \longrightarrow W$ lineare,

   allora $\mathcal{S} \circ F^* = F^* \circ \mathcal{S}$

   $$\mathcal{A} \circ F^* = F^* \circ \mathcal{A}$$

<u>**OSS**</u> per $r > 2$ non è vero

che $\cancel{\mathcal{T}^r(V) = \Lambda^r(V) \oplus \Sigma^r(V)}$

Prodotto tensoriale

Siano $\phi \in \mathcal{T}^r(V)$ e $\psi \in \mathcal{T}^s(V)$ tensori covarianti.

allora si definisce

$$\phi \otimes \psi \in \mathcal{T}^{r+s}(V)$$

$$\phi \otimes \psi (\overbrace{v_1, \dots, v_r}^{r}, \overbrace{v_{r+1}, \dots, v_{r+s}}^{s}) =$$

$$\underbrace{\phi(v_1, \dots, v_r)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\psi(v_{r+1}, \dots, v_{r+s})}_{\in \mathbb{R}}$$

Teorema:

$$\mathcal{T}^r(V) \times \mathcal{T}^s(V) \longrightarrow \mathcal{T}^{r+s}(V)$$
$$(\phi, \psi) \longmapsto \phi \otimes \psi$$

ha le seguenti proprietà:

- bilineare
- associativa
- se $\omega^1, \dots, \omega^n$ è una base di $V^* = \mathcal{T}^1(V)$, allora $\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_r}$ con $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ è una base di $\mathcal{T}^r(V)$ $(\dim \mathcal{T}^r(V) = n^r)$
- se $F_* : W \longrightarrow V$ lineare allora $F^*(\varphi \otimes \psi) = F^*\varphi \otimes F^*\psi$

Prodotto esterno o wedge $\wedge$

$$\Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) \longrightarrow \Lambda^{r+s}(V)$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \underbrace{\frac{(r+s)!}{r!\,s!} \mathcal{A}(\varphi \otimes \psi)}_{=\ \boxed{\varphi \wedge \psi}}$$

- $\wedge$ è bilineare e associativo

- se $\varphi_i \in \Lambda^{r_i}(V)$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k = \frac{(r_1 + \dots + r_k)!}{r_1! \dots r_k!} \mathcal{A}(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k)$$

- $\varphi \wedge \psi = (-1)^{rs} \psi \wedge \varphi$

Esempi

se ω^1 e $\omega^2 \in \Lambda^1(V) = \mathcal{T}^1(V) = V^*$

$$
\begin{aligned}
(\omega^1 \wedge \omega^2)(v_1, v_2) &= \frac{(1+1)!}{1!\,1!}\,\frac{1}{2!}\left[\omega^1 \otimes \omega^2 (v_1, v_2) - \omega^1 \otimes \omega^2 (v_2, v_1)\right] \\
&= \omega^1(v_1)\,\omega^2(v_2) - \omega^1(v_2)\,\omega^2(v_1)
\end{aligned}
$$

Teorema Sia $r > n = \dim V$

allora $\Lambda^r(V) = 0$

Per $0 \leq r \leq n$ $\quad \dim \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$.

Sia $\omega^1, \dots, \omega^n$ base di $\Lambda^1(V) = \mathcal{T}^1(V) = V^*$

allora

$$\left\{ \omega^{i_1} \wedge \ \wedge \omega^{i_r} \ \middle| \ 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n \right\}$$

è una base di $\Lambda^r(V)$

e $$\dim \Lambda(V) = 2^n = \sum_0^n \binom{n}{r}$$