27 marzo 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di venerdì 27 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Stiamo studiando i *grafi hamiltoniani*, cioè quei grafi nei quali esiste un ciclo hamiltoniano (ossia un ciclo che comprende tutti i vertici). Ho detto *ciclo*, cioè un *circuito semplice*: di fatto quindi in tale ciclo i vertici del grafo compaiono ***tutti una e una sola volta***!

Anche se la definizione ha senso sia per i grafi senza orientamento che per i grafi con orientamento, noi limitiamo il nostro studio ai grafi *senza orientamento*. Martedì scorso abbiamo enunciato (e un po’ discusso) il teorema di Ore, che enuncia una condizione sufficiente affinché un grafo senza orientamento con n vertici sia un grafo hamiltoniano: basta (si fa per dire! È una condizione molto pesante!) che comunque presi due vertici non adiacenti la somma dei loro gradi sia almeno n.

Alla luce del teorema di Ore vi avevo chiesto di studiare per quali valori di h e k il grafo completo bipartito $\mathcal{K}_{h,k}$ è hamiltoniano. Penso che abbiate capito subito che quando $h = k$ la condizione del teorema di Ore è verificata (infatti $n = h + k = 2h$ e ogni vertice ha grado $h = \frac{n}{2} = k$, cosicché la somma dei gradi di due vertici qualsiasi è esattamente $h + k = 2h = 2k = n$; ma in realtà non ci sarebbe nemmeno bisogno del teorema di Ore, perché non è difficile “costruire” direttamente un ciclo hamiltoniano in $\mathcal{K}_{h,h}$). L’aspetto interessante del problema è forse piuttosto: che cosa si può dire se $h \neq k$?

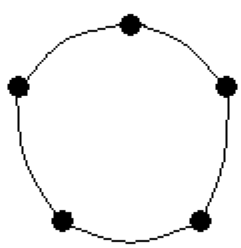
Per fissare le idee, possiamo supporre $h < k$. Ricordiamo che in $\mathcal{K}_{h,k}$ ci sono h vertici di grado k (che possiamo pensare colorati in rosso) e k vertici di grado h (che possiamo pensare colorati in verde). Ogni vertice rosso è adiacente a tutti e soli i k vertici verdi, e ogni vertice rosso è adiacente a tutti e soli gli h vertici rossi. Per il principio dei buchi di piccionaia in qualsiasi circuito che comprenda tutti i vertici di $\mathcal{K}_{h,k}$ almeno due vertici rossi devono essere seguiti dallo stesso vertice verde (fate così: prendete h scatoline etichettate con gli h vertici rossi, e in ciascuna di esse mettete ogni vertice, necessariamente verde, che lo segue nel circuito: poiché i vertici verdi sono più dei vertici rossi, in almeno una scatolina devono finire due vertici verdi!). Quindi se $h \neq k$ in $\mathcal{K}_{h,k}$ non ci può essere un ciclo hamiltoniano, e dunque $\mathcal{K}_{h,k}$ non è un grafo hamiltoniano.

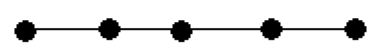
La dimostrazione del teorema di Ore (che, ribadisco, non è in programma) segue abbastanza facilmente dal lemma 6.2.1. Utilizzando lo stesso lemma 6.2.1 si vede anche che la condizione

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n - 1$$

(appena più leggera di quella espressa dal teorema di Ore) è sufficiente affinché nel grafo esista un ***cammino*** hamiltoniano. Anche qui, non importa che studiate la dimostrazione!

Facciamo però una cosa “da matematici”: chiediamoci se queste condizioni sufficienti (rispettivamente, per l’esistenza nel grafo di un ciclo hamiltoniano e per l’esistenza nel grafo di un cammino hamiltoniano) sono per caso anche sufficienti. Ok, da come vi ho presentato la cosa è inutile che cerchi di creare suspense, avete subito capito che sono ***sufficienti ma non necessarie*** (una sensata condizione che sia necessaria e sufficiente affinché un grafo sia hamiltoniano non è ad oggi conosciuta!) però non voglio che vi fidiate della mia parola, ci sono due esempi molto semplici di grafi che possiedono rispettivamente un ciclo hamiltoniano e un cammino hamiltoniano e tuttavia *non verificano* queste condizioni:

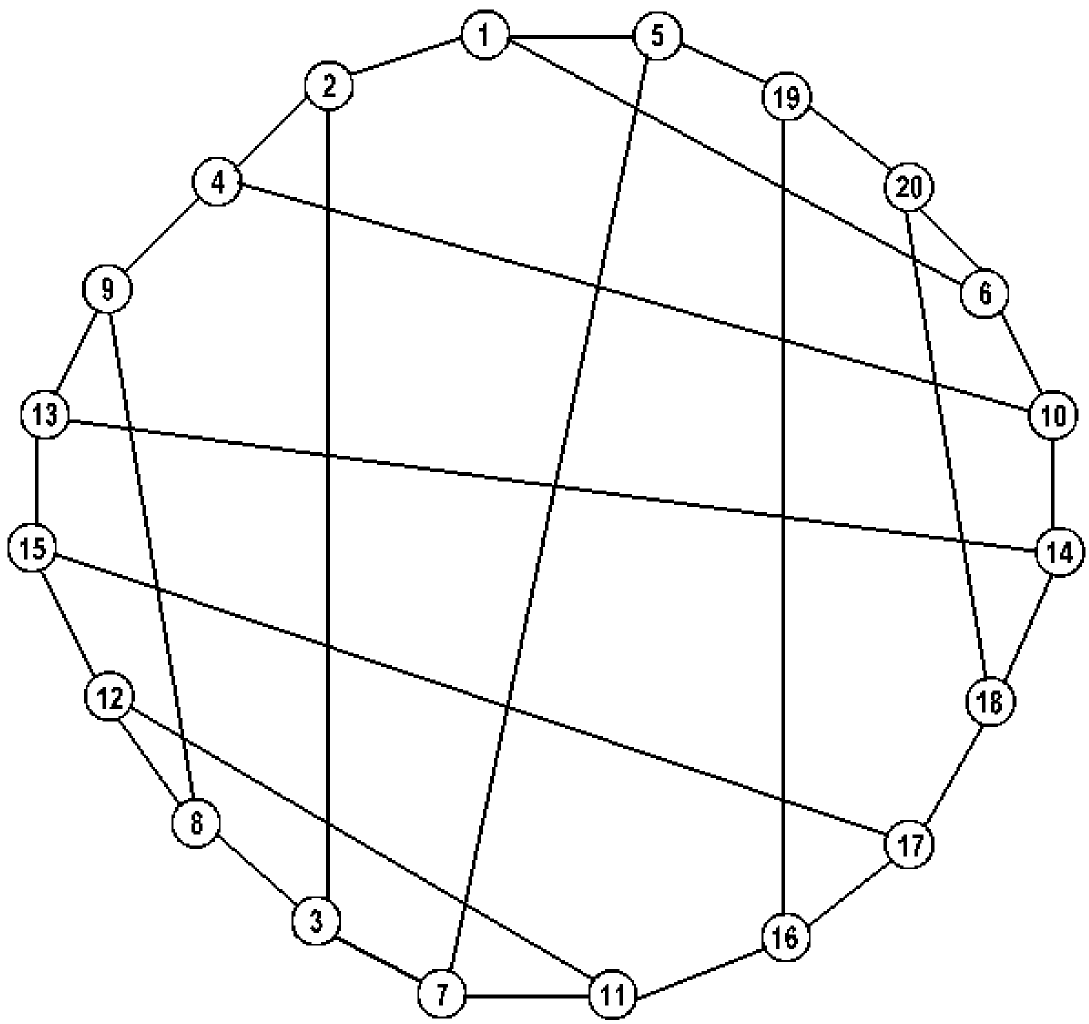




A sinistra vedete il grafo C_5 nel quale esiste ovviamente un ciclo hamiltoniano (il grafo ***è*** un ciclo!) ma ***non è vero che*** comunque presi due vertici non adiacenti la somma dei loro gradi è ≥ 5 (in effetti, non riuscite a trovare nemmeno una coppia di vertici per i quali la somma dei gradi sia ≥ 5). A destra vedete il grafo P_4 nel quale esiste ovviamente un cammino hamiltoniano (il grafo ***è*** un cammino!) ma ***non è vero che*** comunque presi due vertici non adiacenti la somma dei loro gradi è ≥ 4 (notate che per una coppia di vertici non adiacenti opportunamente scelta la condizione è verificata, ma se prendete ad esempio il primo e l’ultimo vertice la somma dei gradi è 2, decisamente minore di 4.

Bene, ma a questo punto ci chiediamo: esiste qualche condizione necessaria affinché un grafo sia hamiltoniano? Abbiamo già discusso, parlando di planarità, quale sia l’utilità di una condizione necessaria affinché in un grafo valga una proprietà (P): se la condizione necessaria non è verificata, possiamo concludere che il grafo non verifica certamente la proprietà (P). Per trovare una condizione necessaria molto semplice e spesso utile affiché un grafo G sia hamiltoniano, basta osservare che se G è hamiltoniano allora G consiste in un ciclo (il ciclo hamiltoniano, appunto) con l’aggiunta di altri lati (eventualmente nessuno, ma in tal caso non c’è niente da scoprire!).

Date un’occhiata a questo grafo disegnato nel piano:



Si capisce subito che si tratta di un grafo hamiltoniano! Infatti il modo in cui sono disposti i vertici nel disegno evidenzia l’esistenza di un ciclo che li comprende tutti. Forse avreste difficoltà invece a rispondere a un’altra domanda: questo grafo è piano? Cioè, può essere disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati?

Facciamo un attimo una digressione per rispondere a questa domanda. Cerchiamo di utilizzare il teorema 4.2.1. Ci sono 20 vertici e 30 lati, quindi (dovendo il calibro ovviamente essere almeno 3) se il grafo è piano deve essere

$$30 \leq 3 \cdot (20 - 2), \qquad \text{cioè} \qquad 30 \leq 3 \cdot 18 = 54$$

e questa condizione (necessaria affinché il grafo sia piano) è dunque verificata. Ma siccome la condizione è soltanto *necessaria*, e non è sufficiente, non possiamo dire nulla!

Beh, un momento, qualcosa possiamo fare: calcolare il calibro del grafo! Con un po’ di attenzione e molta pazienza, si verifica che il calibro è 5. Dunque la condizione necessaria diventa

$$30 \leq \tfrac{5}{3} \cdot 18, \qquad \text{cioè} \qquad 30 \leq 30$$

e dunque continua ad essere verificata! Diciamo che abbiamo buoni motivi per sospettare che il grafo sia piano, ma non possiamo esserne certi finché non riusciamo a disegnarlo nel piano senza sovrapposizione di lati!

Va bene, è inutile che tiri in lungo questo esempio: ormai avrete capito che questo è un disegno (con sovrapposizione di lati!) del grafo del dodecaedro, che abbiamo visto martedì scorso! La numerazione dei vertici nei due grafi implementa l’isomorfismo. L’esempio a me sembra molto significativo, perché fa capire bene (spero) che modi diversi di disegnare nel piano lo stesso grafo possono evidenziare l’una o l’altra delle sue proprietà: il disegno di martedì scorso evidenziava la planarità del grafo, quello che avete visto oggi evidenzia il fatto che esso è hamiltoniano.

E dunque, come dicevo, se un grafo è hamiltoniano esso consiste in un ciclo con l’aggunta di lati. Ora, un ciclo evidentemente è connesso, ma lo è in modo “robusto”: infatti se sopprimete un vertice qualsiasi (e quindi sopprimete inevitabilmente tutti i lati ad esso incidenti) ottenete un nuovo grafo che (forse) non è più un ciclo (dipende dai lati che prima erano “superflui”) ma certamente è ancora connesso! Questa proprietà che vale in modo ovvio per qualsiasi ciclo (guardate anche il teorema 2.2.5 degli appunti), ma che può valere anche per altri grafi, si può esprimere come caso particolare di un’opportuna definizione:

Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Un grafo si dice $k -$ *connesso* se, comunque scelti $k - 1$ suoi vertici, il grafo ottenuto sopprimendo tali vertici (e, necessariamente, tutti i lati ad essi incidenti) è connesso.

Ovviamente, un grafo è $1 -$ connesso se e soltanto se è connesso.

Teorema 2.2.9

Sia $\mathcal{G}$ un grafo. Se $\mathcal{G}$ è indotto da un suo sottografo ciclico, allora $\mathcal{G}$ è $2-$ connesso.

Dimostrazione – Sia C_0

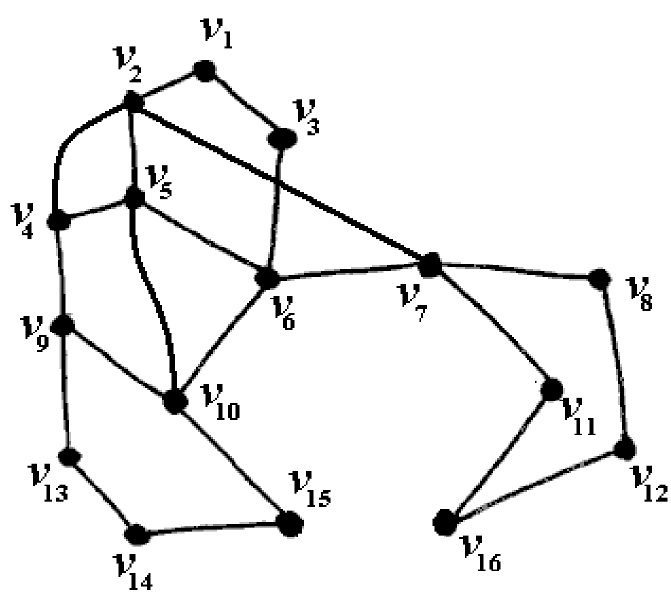
$$\overline{v} = v_1, \ell_2, v_2, ..., v_{i-1}, \ell_i, v_i, \ell_{i+1}, ..., v_{s-1}, \ell_s, v_n = \overline{v}$$

il ciclo che induce $\mathcal{G}$. Dobbiamo dimostrare che il grafo $\mathcal{G}_0$ ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo v_i (e tutti i lati ad esso incidenti) è connesso, cioè che presi comunque due vertici v, w di $\mathcal{G}_0$ esiste in $\mathcal{G}_0$ un cammino di estremi v e w. Per ipotesi, nel ciclo C_0 compaiono tutti i vertici di $\mathcal{G}$, dunque sarà $v = v_h$ e $w = v_k$ per certi numeri naturali h, k compresi tra 1 e n (ma diversi da i).

Se h, k sono entrambi minori di i (o entrambi maggiori di i), un cammino in $\mathcal{G}_0$ di estremi v_h e v_k si "legge" direttamente in quel che resta di C_0 dopo la soppressione di v_i (e di tutti i lati ad esso incidenti); se invece (ad esempio) h è minore di i mentre k è maggiore di i, per trovare in $\mathcal{G}_0$ un cammino di estremi v_h e v_k basta percorrere "a ritroso" C_0 da v_h a $\overline{v}$ e poi ancora da $\overline{v}$ a v_k.

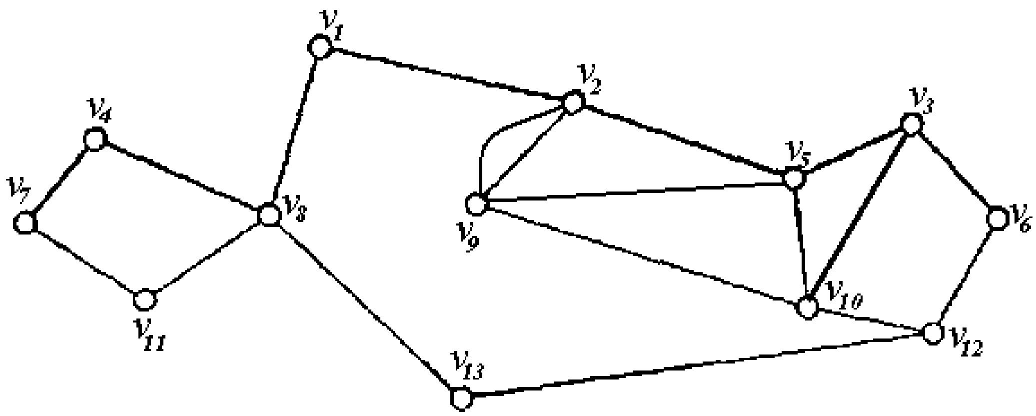
Ora, pensateci un attimo: un grafo è indotto da un suo sottografo ciclico se e soltanto se consiste in quel sottografo ciclico con l'aggiunta di eventuali altri lati: cioè se e solo se è hamiltoniano! Quindi il teorema 2.2.9 ci dice di fatto che ***essere*** $2-$ ***connesso è condizione necessaria perchè un grafo sia hamiltoniano***!

Un grafo come il seguente



potete dunque dire subito che ***non è hamiltoniano***, perché ***non è*** $\mathbf{2}-$ ***connesso***! (Sopprimendo il vertice v_7 e i quattro lati ad esso incidenti si ottiene un grafo non connesso).

E lo stesso potete dire per il seguente grafo:



Una condizione necessaria affinché un grafo (senza orientamento) disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati sia hamiltoniano è espressa dal teorema di Grinberg: la vediamo nella seconda lezione di oggi. Questa prima lezione la chiudo invitandovi a disegnare nel piano i grafi degli altri quattro solidi “platonici” (cioè regolari) oltre al dodecaedro (li potete cercare sul vostro vecchio libro di geometria (che certamente non avrete buttato via!), oppure (ok ok) su Wikipedia. Tre sono velocissimi da considerare: il cubo, il tetraedro e l’ottaedro. Ma anche l’icosaedro non è poi così terribile, va bene che sono venti facce ma sono tutte triangolari! E adesso che avete disegnato i grafi di tutti e cinque i solidi platonici (immaginando ogni volta di “aprire” una faccia e “stendere” sul piano l’involucro del solido – sono quindi tutti grafi piani!) per ciascuno di essi stabilite, argomentando come si deve, se è un grafo euleriano e se è un grafo hamiltoniano!