27 marzo 2020 - lezione 2

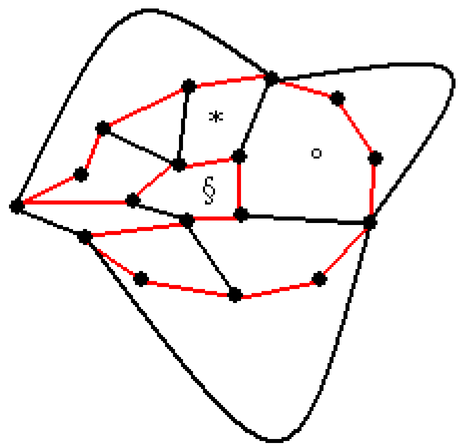
Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di venerdì 27 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Concludiamo la parte teorica sui grafi hamiltoniani con una condizione necessaria affinché un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati sia hamiltoniano: il teorema di Grinberg. A differenza di quel che accade per la dimostrazione del teorema di Ore e di altri risultati collegati, che è molto tecnica e specifica alla particolare situazione esaminata, la dimostrazione del teorema di Grinberg non solo non presenta particolari difficoltà ma utilizza una tecnica (quella del “doppio conteggio”) assai frequente nella matematica delle strutture finite; è per questo che ho escluso dal programma di quest’anno la prima ed includo invece la seconda (ma ricordate sempre che la conoscenza di queste dimostrazioni un po’ lunghette influisce sul voto di esame ma non sul valore booleano del risultato: cioè chi non ha studiato dimostrazioni come queste rischia di conseguire un voto un po’ più basso ma non rischia, solo per questo fatto, di essere bocciato!).

Ok, dunque si tratta di una condizione necessaria: supponiamo che il nostro grafo $\mathcal{G}$, che è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, abbia un ciclo hamiltoniano; l’insieme dei punti del piano che appartengono ai lati di questo ciclo formano una curva semplice chiusa, che divide il piano in due regioni: una, *limitata*, si dice ***interna*** alla curva (cioè al ciclo), l’altra, *illimitata*, si dice ***esterna*** alla curva (cioè al ciclo). Le facce del grafo si possono suddividere in due famiglie: facce interne al ciclo (quelle che appunto occupano parte della regione interna) e facce esterne al ciclo (quelle che invece occupano parte della regione esterna); inoltre si possono classificare a seconda del numero di lati che ne compongono il bordo.

Guardate questo disegno:



Nel grafo c'è un ciclo hamiltoniano, i cui lati sono disegnati in rosso. Col simbolo * ho indicato una faccia *interna* al ciclo che ha il bordo formato da 4 lati; col simbolo ° ho indicato una faccia anch'essa *interna* al ciclo ma che ha il bordo formato da 6 lati; col simbolo § ho indicato una faccia *esterna* al ciclo, che ha il bordo formato da 5 lati.

Avete capito bene come funziona questa classificazione delle facce? Vediamo. Contate quante sono le facce interne al ciclo col bordo formato da 3 lati; il numero delle facce interne al ciclo col bordo formato da 3 lati lo indichiamo con i_3. Avete calcolato il valore di i_3? Non è difficile: si trova subito che di facce interne al ciclo col bordo formato da 3 lati ce n'è una sola e quindi: $i_3 = 1$.

Ora indichiamo con i_4 il numero delle facce interne al ciclo col bordo formato da 4 lati. Una è quella che avevo indicato con *, ne vedete altre? Ma certo, ce n'è esattamente un'altra. Dunque: $i_4 = 2$.

E naturalmente possiamo andare avanti, indicando con i_5 il numero delle facce interne al ciclo col bordo formato da 5 lati, con i_6 il numero delle facce interne al ciclo col bordo formato da 6 lati ecc. ecc.. Si trova che $i_5 = 2$ e $i_6 = 1,$ mentre $i_k = 0$ per $k > 6$.

Ah, e poi naturalmente possiamo classificare allo stesso modo le facce esterne al ciclo, a seconda del numero di lati che ne costituiscono il bordo; e contarle con una notazione analoga. Dunque indicheremo con e_3 il numero delle facce esterne al ciclo col bordo formato da 3 lati, indicheremo con e_4 il numero delle facce esterne al ciclo col bordo formato da 4 lati, e così via. Si trova che

$e_3 = 0, \quad e_4 = 3, \quad e_5 = 3, \quad e_k = 0$ per $k > 3$.

Adesso calcolate, per il grafo sopra disegnato, il valore di questa espressione:

$$(i_3 - e_3) + 2(i_4 - e_4) + 3(i_5 - e_5) + 4(i_6 - e_6)$$

(Come vedete, si fa la differenza fra il numero delle facce interne al ciclo hamiltoniano col bordo formato da k lati e il numero di quelle esterne al ciclo hamiltoniano col bordo formato da k lati, questa differenza si moltiplica per $k-2$ e poi si sommano tutti i numeri così ottenuti).

Ricordiamo i valori che avevamo trovato:

$$i_3 = 1, \quad i_4 = 2, \quad i_5 = 2 \quad \text{e} \quad i_6 = 1, \quad \text{mentre} \quad i_k = 0 \quad \text{per } k > 6\,.$$
$$e_3 = 0, \quad e_4 = 3, \quad e_5 = 3, \quad e_k = 0 \quad \text{per } k > 3\,.$$

Dunque,

$$(i_3 - e_3) + 2(i_4 - e_4) + 3(i_5 - e_5) + 4(i_6 - e_6) =$$
$$= (1-0) + 2(2-3) + 3(2-3) + 4(1-0) = 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 =$$
$$= 1 - 2 - 3 + 4 = 0$$

Il teorema di Grinberg dice che la somma dei vari $(k-2)(i_k - e_k)$ fa ***sempre zero***. Se seguite attentamente la dimostrazione, vedrete che non è complicata. Mentre non è invece intuitivo il modo in cui si può utilizzare il risultato espresso dal teorema: infatti, visto che non abbiamo idea se ci sia un ciclo hamiltoniano e quindi men che mai quale esso sia (del resto se sapessimo che il ciclo c'è non ci sarebbe più niente da scoprire in questo ordine di idee…), visto, dicevo, che non sappiamo quali e quante facce sono interne e quali sono esterne a questo fantomatico eventuale ciclo, come si fa ad utilizzare il teorema? Bene, non spaventatevi, ne parlamo (oddìo, parliamo… si fa per dire…) dopo aver visto la dimostrazione.

Enunciamo dunque il teorema e vediamone la dimostrazione.

Teorema 6.3.2 (Grinberg)

Sia $\mathcal{G}$ un grafo piano semplice e senza cappi, e sia C_0 un ciclo hamiltoniano in $\mathcal{G}$. Fissato un disegno di $\mathcal{G}$ nel piano senza sovrapposizione di lati, sia s il numero massimo dei lati nelle facce di $\mathcal{G}$ e per $j := 3, 4, ..., s$ sia

– i_j il numero delle facce <u>interne</u> a C_0 col contorno formato da j lati;

– e_j il numero delle facce <u>esterne</u> a C_0 col contorno formato da j lati.

Allora

$$(i_3 - e_3) + 2(i_4 - e_4) + 3(i_5 - e_5) + ... + (s-2)(i_s - e_s) = 0\,.$$

Dimostrazione – Chiamiamo *diagonali* di $\mathcal{G}$ i lati che non appartengono a C_0.

Cominciamo a ragionare sulle facce interne a C_0, contandole in due modi diversi. Se ci sono d diagonali interne a C_0, le facce interne a C_0 sono $d+1$. Ma sono anche $i_3 + i_4 + ... + i_s$. Dunque:

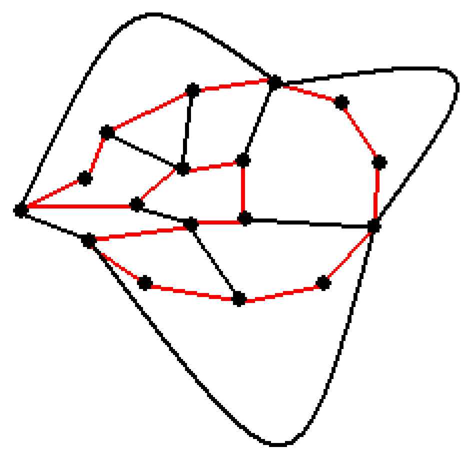
$$i_3 + i_4 + ... + i_s = d + 1.$$

Ora contiamo in due modi diversi i lati delle facce interne a C_0. Se sommiamo i lati di tutte le facce, ottenendo $3i_3 + 4i_4 + ... + si_s$, contiamo due volte ciascuna delle d diagonali interne a C_0 e una volta sola ciascuno degli n lati di C_0; dunque:

$$3i_3 + 4i_4 + ... + si_s = 2d + n\,.$$

Sottraendo membro a membro da questa uguaglianza il doppio della precedente, otteniamo un'uguaglianza nella quale non compare più il numero d delle diagonali interne a C_0:

$$i_3 + 2i_4 + ... + (s-2)i_s = n - 2\,.$$



Possiamo ora ripetere lo stesso conteggio ragionando sulle facce esterne a C_0, sui loro lati e sulle diagonali esterne a C_0. Si ottiene che

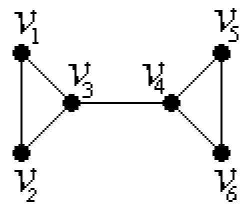
$$e_3 + 2e_4 + ... + (s-2)e_s = n - 2$$

e infine, sottraendo membro a membro, si ha l'asserto.

Adesso cerchiamo di capire come si applica il teorema, ricordando che esso esprime una condizione *necessaria* affinché il grafo $\mathcal{G}$ sia hamiltoniano, e quindi si può usare soltanto per dimostrare che $\mathcal{G}$ ***non è*** hamiltoniano.

Per ogni valore di k ($k = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$) possiamo contare il numero totale delle facce col bordo formato da k lati: tale numero è ***la somma*** fra i_k ed e_k. Questa informazione però può a volte bastare per consentirci di escludere che la relazione espressa dal teorema di Grinberg possa valere.

Cominciamo con un esempio talmente banale da rischiare l’ovvietà.



In questo grafo tutti gli i_j e tutti gli e_j sono nulli tranne per $j = 3$ e $j = 7$; inoltre, certamente $i_7 = 0$ e $e_7 = 1$. Se nel grafo ci fosse un ciclo hamiltoniano, per il teorema di Grinberg dovrebbe essere

$$(i_3 - e_3) + 5(-1) = 0$$

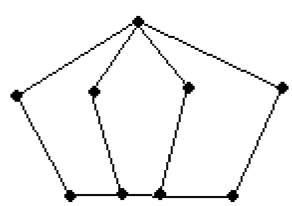
ossia

$$i_3 - e_3 = 5$$

assurdo perché la coppia $(i_3,\ e_3)$ può assumere soltanto i valori $(2,\ 0)$, $(1,\ 1)$ e $(0,\ 2)$. Possiamo dunque concludere che il grafo non è hamiltoniano.

Vale la pena di notare che a questa conclusione saremmo potuti giungere ancor più facilmente osservando che il grafo non è $2-$ connesso (perché il grafo ottenuto sopprimendo, ad esempio, v_3, non è connesso).

Vediamo dunque un altro esempio appena meno banale:



In questo grafo tutti gli i_j e tutti gli e_j sono nulli tranne per $j = 5$ e $j = 7$; inoltre, certamente $i_7 = 0$ e $e_7 = 1$. Se nel grafo ci fosse un ciclo hamiltoniano, per il teorema di Grinberg dovrebbe essere

$$3(i_5 - e_5) + 5(-1) = 0$$

ossia

$$3(i_5 - e_5) = 5$$

assurdo perché 3 non divide 5.

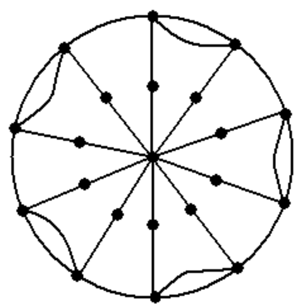
Possiamo dunque concludere che il grafo non è hamiltoniano. Osserviamo che questa volta non avremmo potuto fare riferimento al teorema 6.3.1 perché il grafo proposto è $2-$ connesso.

Concludiamo questa lezione con qualche esercizio per vedere se avete capito i teoremi che abbiamo studiato sui grafi euleriani e su quelli hamiltoniani. Ricordate anche gli esercizi sui grafi dei poliedri che vi ho proposto alla fine dell’ora precedente (lezione 1 di oggi venerdì 27 marzo 2020). Avete tutto il fine settimana per dedicarvici, visto che dovete stare tappati in casa!

Martedì prossimo 31 marzo 2020 discuteremo tutti questi esercizi, mentre l’ultimo argomento di teoria dei grafi, cioè il problema della colorazione delle carte geografiche, costituirà la lezione di venerdì 3 aprile 2020.

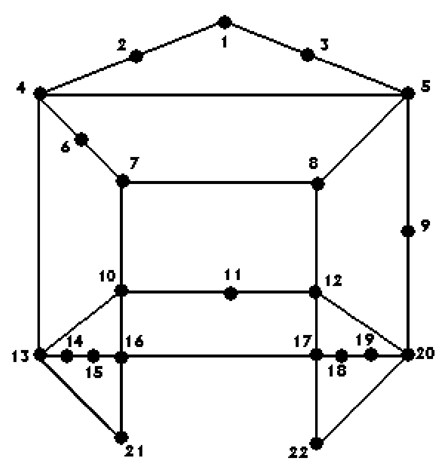
Esercizio 1

Dite se il grafo disegnato qui sotto, che ha 21 vertici e 35 lati, è euleriano e/o hamiltoniano.



Esercizio 2

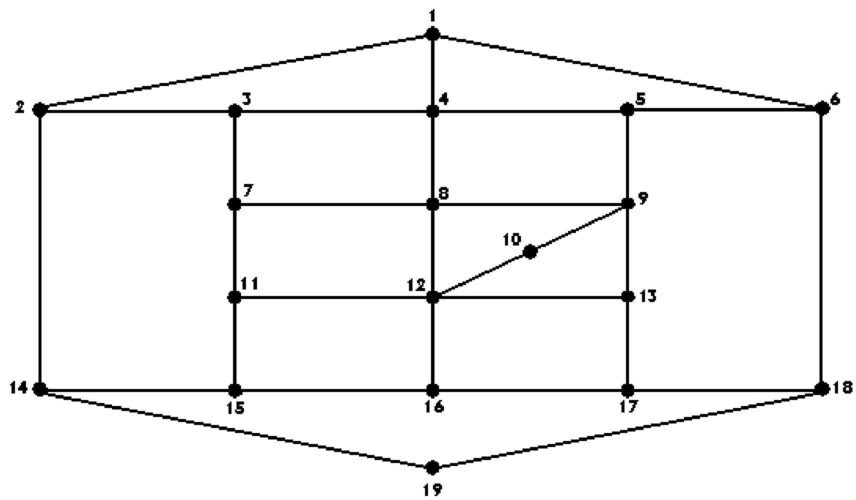
Considerate il grafo disegnato qui sotto, che ha 22 vertici (numerati da 1 a 22) e 31 lati. È un grafo euleriano? È un grafo hamiltoniano? Questo disegno può essere tracciato (partendo da un vertice) senza mai ripassare sullo stesso tratto? Se la risposta è affermativa, si può partire da qualsiasi vertice? Oppure da quale/i?



Esercizio 3

Considerate il grafo senza orientamento disegnato qui sotto, che ha 19 vertici (numerati da 1 a 19) e 30 lati e dite, motivando la risposta, se ha

- un circuito euleriano;
- un cammino euleriano (e in tal caso quali sono i possibili estremi);
- un ciclo hamiltoniano.



Esercizio 4

Considerate il grafo senza orientamento disegnato qui sotto, che ha 12 vertici (numerati da 1 a 12) e 18 lati e dite, motivando la risposta, se ha

- un circuito euleriano;
- un cammino euleriano (e in tal caso quali sono i possibili estremi);
- un ciclo hamiltoniano.