Esercizi integrali impropri 1

ES 4 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx$

considериamo $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$

I. $\alpha,\beta>0$ Allora $f(x)>0$ in $[2,+\infty)$ e $f(x)\downarrow$

ne segue che l'integrale e la serie $\displaystyle\sum_2 \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

hanno lo stesso carattere. La serie converge $\iff \alpha>1$ (x ES. ad es. con criterio di condensazione)

quindi $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx$ converge sse $\alpha>1$.

II. se $\alpha>1,\ \beta\le 0$ si ha $\dfrac{\ln^{|\beta|} x}{x^\alpha} = \dfrac{\ln^{|\beta|} x}{x^\varepsilon}\,\dfrac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ dove $\alpha=1+2\varepsilon$ $\exists\,\varepsilon>0$

e poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{|\beta|}x}{x^\varepsilon}=0$, asintoticamente si ha $f(x)<\dfrac{1}{x^{1+\varepsilon}}$

e per confronto $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

- $\alpha\le 1$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge infatti $\alpha=1-\varepsilon$ $\exists\,\varepsilon>0$ da cui

$\underset{x\in(2,+\infty)}{0<f(x)}=\dfrac{1}{x^\alpha\ln^\beta x}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^\varepsilon}{\ln^\beta x}$ e poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\varepsilon}{\ln^\beta x}=+\infty$ $\forall\varepsilon>0$ $\forall\beta\in\mathbb{R}$

si ha $f(x)>\dfrac{1}{x}$ asintoticamente e quindi per confronto $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge ☒

OSS: AI NOSTRI FINI DELL'ESERCIZIO NON È NECESSARIO SEPARARE LO STUDIO DEL CASO II. INFATTI SI PUÒ TRATTARE IL CASO $\alpha>1$, $\beta\in\mathbb{R}$ COME NEL CASO I. TUTTAVIA MI SEMBRAVA IMPORTANTE MOSTRARVI LE DUE TECNICHE

ES 10 Trovare $c\in\mathbb{R}$ t.c. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1}\right)dx$ converge

$$f(x)=\frac{x}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1}=\frac{x}{2(x^2+c)}-\frac{c}{x+1}=\frac{x^2+x-2c(x^2+c)}{2(x^2+c)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-2cx^2-2c^2}{2(x^2+c)(x+1)}=\frac{x^2(1-2c)+x-2c^2}{2(x^2+c)(x+1)}$$

OSS: • se $c\neq 1/2$ allora $f(x)=\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$ (x ES)

inoltre segno di f è costante per x suff. grande quindi per confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

• se $c = 1/2$ allora $f(x) = \Theta\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e analog. al caso precedente si conclude x confronto asintotico che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

ES (19) Calcolare il valore di $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \sqrt{|\cos x|}}\,dx$

OSS: l'integrale è improprio per $x = \pi/2$

consideriamo $t < \pi/2 \Rightarrow \int_0^t \frac{\sin x}{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_1^{\cos t} \frac{-dy}{y^2 + \sqrt{y}}$

formula di sostituzione

$$= \int_{\cos t}^{1} \frac{1}{y^2 + \sqrt{y}}\,dy = \int_{\cos t}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}\,(1 + y^{3/2})}\,dy$$

OSS: $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \cos t = 0^+$ e per $y \to 0^+$ $\frac{1}{\sqrt{y}\,(1+y^{3/2})}$ è integrabile

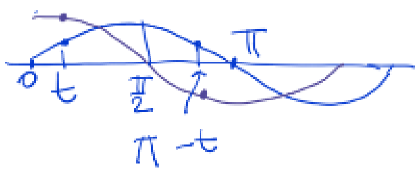
quindi $\exists$ finito $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \int_{\cos t}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}\,(1+y^{3/2})}\,dy$

da cui $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}}\,dx$ converge.

X ES: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \sqrt{|\cos x|}}\,dx$ converge

[ATTENZIONE AI SEGNI!]

da cui $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \sqrt{|\cos x|}}\,dx$ converge



OSS sia $t \in (0, \pi/2)$ allora

$$\left.\begin{array}{l} \sin t = \sin(\pi - t) \\ \cos t = -\cos(\pi - t) \end{array}\right| \Rightarrow f(t) = f(\pi - t)$$

da cui $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\pi - t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \pi - t = \tau}}{=} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\tau)\,(-d\tau) =$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\tau)\,d\tau \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

X ES. Calcolare $I = \int_0^{\tau} \frac{1}{y^2 + \sqrt{y}}\,dy$ per $0 < y < \pi/2$

$\cdot \lim_{t \to \pi/2} \ldots t.$

ES (23) Discutere la convergenza di $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4+1} \cdot \operatorname{arctg} x} dx$

OSS l'integrale è improprio per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$

$\cdot\ x \in U_{0^+}$ $\quad \cdot\ \frac{e^{-x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4+1} \cdot \operatorname{arctg} x} < 0$ in U_{0^+} (ha segno costante)

$$\cdot\ \frac{e^{-x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4+1} \cdot \operatorname{arctg} x} = \frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} \cdot \frac{-x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^4+1}} = \Theta(x)$$

X ES: applicare la definizione di $\Theta(x)$

$\Rightarrow \frac{e^{-x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4+1} \cdot \operatorname{arctg} x}$ è integrabile in U_{0^+} in quanto $\lim_{x \to 0^+} (\ldots) = 0$
e quindi è funz. continua in U_{0^+} e limitata $\Rightarrow$ integrabile

$\cdot\ x \to +\infty$ $\quad \cdot\ \frac{e^{-x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4+1} \cdot \operatorname{arctg} x} < 0$ definitivamente (in realtà $\forall x > 0$)

$$\cdot\ \frac{e^{-x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4+1}\ \operatorname{arctg} x} = \Theta\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{4/3}}\right)$$

X ES: applicare la DEFINIZIONE di Θ di una funzione

OSS $\frac{e^{-x^2}}{x^{4/3}} \leq e^{-x^2}$ per $x > 1$ da cui per confronto $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^{4/3}} dx$ converge

che implica per confronto asintotico anche che
$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4+1}\ \operatorname{arctg} x} dx$ converge.

ES 12 $\int_0^1 x^{\ln x} dx$

$\ln x \quad \ln x \quad \ln^2 x$

OSS: $\forall x>0 \quad x = e^{\ln x} \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} \doteq f(x)$

ora: $e^{\ln^2 x} \in C^0((0,+\infty)) \Rightarrow f$ è integrabile in $[a,1]$ $\forall a>0$

occorre valutare se f è integrabile in $[0;a]$

cioè se $\exists \lim_{t\to 0^+} \int_t^a x^{\ln x}\,dx$.

consideriamo $x\to 0^+$ allora $\ln^2 x \to +\infty$ da cui $\exists\, U_{0^+}$ intorno dx di $x=0$

t.c. $\ln^2 x > 1 \Rightarrow |\ln x|>1$ per $x\in U_{0^+}$

da cui $\forall x\in U_{0^+}$ $\ln^2 x > |\ln x|$

ora: poiché per $x\in U_{0^+}$ si ha $\ln x<0$ segue

$\ln^2 x > -\ln x$ da cui $e^{\ln^2 x} > e^{-\ln x} = e^{\ln(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \forall t \in U_{0^+}$
$$\int_t^a e^{\ln^2 x}\,dx > \int_t^a \frac{1}{x}\,dx$$

da cui segue $\lim_{t\to 0^+} \int_t^a e^{\ln^2 x}\,dx = +\infty$ essendo $\int_0^a \frac{1}{x}\,dx$ divergente

ALTERNATIVAMENTE: (siccome $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ si ha per $x\in U_{0^+}$ $\ln x < -1$ $\Rightarrow \forall x\in(0,1)$ $x^{\ln x} > x^{-1} > 0$)

ES 16
$$\underbrace{\int_1^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{tg\,x}}{\sqrt[(x-1)]{|\ln(x-1)|}}\,dx}_{\doteq f(x)}$$

$f(x) = \sqrt[3]{tg\,x}\cdot\left(|\ln(x-1)|\right)^{\frac{-1}{x-1}}$

OSS. $tg\,x \in C^0([1,\pi/2))$

$\ln(x-1) \in C^0((1;\pi/2])$

$|\xi|^{\frac{-1}{x-1}} \in C^0((1,\pi/2])$ $\forall \xi\neq 0$

e osserviamo che $\ln(x-1)\neq 0$ $\forall x\in(1,\pi/2)$

si ha: $f\in C^0([a,b])$ $\forall\, 1<a<b<\frac{\pi}{2}$

quindi f integrabile in $[a,b]$

occorre valutare l'integrabilità in 1 e in $\frac{\pi}{2}$.

cioè l'integrale è improprio in 1 e in $\frac{\pi}{2}$ (e solo in questi punti).

considero $x\to 1^+$ allora $\sqrt[3]{tg\,x} = \Theta(c)$ (con c costante positiva $=\sqrt[3]{tg\,1}$)

$|\ln(x-1)|^{\frac{-1}{x-1}} = e^{\frac{-1}{(x-1)}\cdot\ln(|\ln(x-1)|)}$

ora $\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{(x-1)} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \ln|\ln(x-1)| = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{(x-1)}\ln(|\ln(x-1)|) = -\infty$

da cui $\lim \quad -\frac{1}{\ }\ln(|\ln(x-1)|)$

$$\lim_{x\to 1^+} e^{(x-1)\ln(|\ln(x-1)|)} = 0$$

da cui $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ e quindi f può essere estesa con continuità a $[1, a]$ ed è quindi integrabile in $[1, a]$ $\forall a : 0 < a < \frac{\pi}{2}$.

considero $x \to \frac{\pi}{2}^-$ allora $|\ln(x-1)|^{-\frac{1}{x-1}} = \Theta(C')$ (con C' costante > 0 $C' = |\ln(\pi/2 - 1)|^{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-1}}$)

invece $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} = +\infty$ quindi occorre indagare il comportamento di $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$ per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ per stabilire se è integrabile

ora $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x = \frac{\pi}{2} - t}{=} \frac{\cos t}{\sin t}$

quindi l'andamento di $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$ per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ è lo stesso di $\sqrt[3]{\frac{\cos t}{\sin t}}$ per $t \to 0^+$

oss: per $t \to 0^+$ si ha $\sqrt[3]{\cos t} = \Theta(1)$
$\sqrt[3]{\sin t} = \Theta(\sqrt[3]{t})$ ← con $t = \frac{\pi}{2} - x$

da cui per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ si ha $f(x) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - x}}\right)$ con $f(x) > 0$ in $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}^-}$ (in quanto $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$)

si può applicare il criterio del confronto asintotico

da cui: $\int_a^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ ha lo stesso andamento di $\int_a^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - x}}\,dx$ che è convergente

in quanto si riconduce all'integrale $\int_0^a \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy$ che è convergente. ☒