Lezione n. 13: Esercizi sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è [...] e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p[...] ffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è ... e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p... ffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/03/2020

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

- Ci occuperemo di equazioni del tipo:

(I) $\quad \boxed{a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = \bar{b}(t)}$ dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\bar{b}: I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo I

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

- Ci occuperemo di equazioni del tipo:

$$(\mathrm{I}) \qquad a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = \bar{b}(t)$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\bar{b} : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo I

- L'equazione omogenea associata a (I) è la seguente:

$$(\mathrm{II}) \qquad \boxed{a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = \underset{\bar{b}=0}{\underset{\uparrow}{0}}}$$

con eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (III)

- Nel seguito considereremo il caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (per l'eq. III) e $\boxed{\lambda_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ \lambda_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -b/2a \quad (\text{se } \Delta = 0)}$

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

- Ci occuperemo di equazioni del tipo:

  (I) $\quad a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = \bar{b}(t)$ dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\bar{b}: I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo I

- L'equazione omogenea associata a (I) è la seguente:

  (II) $\quad a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = 0$ ($\bar{b} = 0$) con eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (III)

- Nel seguito considereremo il caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (per l'eq. III) e $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

  $\lambda_1 = \lambda_2 = -b/2a$ (se $\Delta = 0$)

- Sappiamo già che la soluzione generale di (I) ha forma $\boxed{y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t)}$

  dove $y_{(II)}(t)$ è la soluzione generale dell'eq. omogenea e $y_p(t)$ è una soluzione particolare di (I).

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

- Ci occuperemo di equazioni del tipo:

(I) $\quad a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = \bar{b}(t)$ dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\bar{b}: I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo I

- L'equazione omogenea associata a (I) è la seguente:

(II) $\quad a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \underset{\bar{b}=0}{=} 0$ con eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (III)

- Nel seguito considereremo il caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (per l'eq. III) e $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -b/2a$ (se $\Delta = 0$)

- Sappiamo già che la soluzione generale di (I) ha forma $y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t)$

dove $y_{(II)}(t)$ è la soluzione generale dell'eq. omogenea e $y_p(t)$ è una soluzione particolare di (I).

Inoltre, se $\Delta > 0 \Rightarrow y_{(II)}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; se $\Delta = 0 \Rightarrow y_{(II)}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t\, e^{\lambda_1 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Metodo di similitudine:

$$\begin{cases} \bar{b}(t) = e^{rt}\, p(t), \text{ con } p(t) \text{ polinomio in } t,\ r \in \mathbb{R} \quad (\text{se } r=0 \Rightarrow \bar{b}(t) = p(t)) \\ \bar{b}(t) = \sin(\beta t)\, p(t) \text{ o } \bar{b}(t) = \cos(\beta t)\, p(t),\ p(t) \text{ come prima},\ \beta \in \mathbb{R} \\ \bar{b}(t) = e^{rt}\sin(\beta t)\, p(t) \text{ o } \bar{b}(t) = e^{rt}\cos(\beta t)\, p(t),\ \text{———},\ \text{———} \\ \bar{b}(t) = \text{somme di termini del tipo sopra} \end{cases}$$

Per $y_p(t)$ cerchiamo una struttura dello stesso tipo

Metodo di similitudine: Per $y_p(t)$ cerchiamo una struttura dello stesso tipo

$$\begin{cases} \bar{b}(t) = e^{rt}\, p(t), \text{ con } p(t) \text{ polinomio in } t,\ r \in \mathbb{R} \quad (\text{se } r=0 \Rightarrow \bar{b}(t) = p(t)) \\ \bar{b}(t) = \sin(\beta t)\, p(t) \text{ o } \bar{b}(t) = \cos(\beta t)\, p(t),\ p(t) \text{ come prima},\ \beta \in \mathbb{R} \\ \bar{b}(t) = e^{rt}\sin(\beta t)\, p(t) \text{ o } \bar{b}(t) = e^{rt}\cos(\beta t)\, p(t),\ \text{———},\ \text{———} \\ \bar{b}(t) = \text{somme di termini del tipo sopra} \end{cases}$$

Esempio

A da determinarsi

$$\boxed{y'' - y' - 2y = 2e^{-3t}} \Rightarrow \boxed{y_p(t) = Ae^{-3t}} \text{ da cui segue } \boxed{y_p'(t) = -3Ae^{-3t},\quad y_p''(t) = 9Ae^{-3t}}$$

Metodo di similitudine: Per $y_p(t)$ cerchiamo una struttura dello stesso tipo

$$\begin{cases} \bar{b}(t) = e^{rt}\, p(t), \text{ con } p(t) \text{ polinomio in } t,\ r \in \mathbb{R} \quad (\text{se } r=0 \Rightarrow \bar{b}(t) = p(t)) \\ \bar{b}(t) = \sin(\beta t)\, p(t) \ \text{ o } \ \bar{b}(t) = \cos(\beta t)\, p(t), \ p(t) \text{ come prima}, \ \beta \in \mathbb{R} \\ \bar{b}(t) = e^{rt}\sin(\beta t)\, p(t) \ \text{ o } \ \bar{b}(t) = e^{rt}\cos(\beta t)\, p(t), \ \text{———}, \ \text{———} \\ \bar{b}(t) = \text{somma di termini del tipo sopra} \end{cases}$$

Esempio

$$y'' - y' - 2y = 2e^{-3t} \Rightarrow y_p(t) = Ae^{-3t}$$

A da determinarsi

da cui segue $y_p'(t) = -3Ae^{-3t}$, $y_p''(t) = 9Ae^{-3t}$

allora inserendo y_p insieme alle sue derivate in $y'' - y' - 2y = 2e^{-3t}$ otteniamo:

$$\boxed{\underbrace{9Ae^{-3t}}_{y_p''} \underbrace{+3Ae^{-3t}}_{-y_p'} \underbrace{-2Ae^{-3t}}_{-2y_p} = 2e^{-3t}} \iff 10Ae^{-3t} = 2e^{-3t} \iff A = 1/5.$$

Di conseguenza $y_p(t) = \frac{1}{5}e^{-3t}$.

Metodo di similitudine:

Per $y_p(t)$ cerchiamo una struttura dello stesso tipo

$$\begin{cases} \bar{b}(t) = e^{rt} p(t), \text{ con } p(t) \text{ polinomio in } t,\ r \in \mathbb{R} \quad (\text{se } r=0 \Rightarrow \bar{b}(t) = p(t)) \\ \bar{b}(t) = \sin(\beta t)\, p(t) \text{ o } \bar{b}(t) = \cos(\beta t)\, p(t),\ p(t) \text{ come prima},\ \beta \in \mathbb{R} \\ \bar{b}(t) = e^{rt}\sin(\beta t)\, p(t) \text{ o } \bar{b}(t) = e^{rt}\cos(\beta t)\, p(t),\ \text{———},\ \text{———} \\ \bar{b}(t) = \text{somma di termini del tipo sopra} \end{cases}$$

Esempio

A da determinarsi

$$y'' - y' - 2y = 2e^{-3t} \Rightarrow y_p(t) = Ae^{-3t} \quad \text{da cui segue} \quad y_p'(t) = -3Ae^{-3t},\ y_p''(t) = 9Ae^{-3t}$$

allora inserendo y_p insieme alle sue derivate in $y'' - y' - 2y = 2e^{-3t}$ otteniamo:

$$\underbrace{9Ae^{-3t}}_{y_p''} \underbrace{+3Ae^{-3t}}_{-y_p'} \underbrace{-2Ae^{-3t}}_{-2y_p} = 2e^{-3t} \iff 10Ae^{-3t} = 2e^{-3t} \iff A = 1/5.$$

Di conseguenza $y_p(t) = \frac{1}{5}e^{-3t}$. Inoltre l'eq. caratteristica associata all'equazione data è:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \iff (\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{y_{(II)}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}}$$

e $\boxed{y_{(I)}(t) = y_{II}(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-3t}}$.

Esempio

$$y'' - y' - 2y = \underbrace{3t^2 - 1}_{\text{Polinomio del secondo ordine}} \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + C \quad , \; A, B, C \text{ da determinarsi}$$

<u>Esempio</u>

$$y'' - y' - 2y = \underbrace{3t^2-1}_{\substack{\text{Polinomio}\\ \text{del secondo}\\ \text{ordine}}} \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = At^2 + Bt + C \quad , \ A, B, C \text{ da determinarsi}$$

Come prima calcoliamo $y_p'(t) = 2At + B$ e $y_p''(t) = 2A$ e inseriamole nell'eq. assegnata

Segue:

$$2A - (2At + B) - 2(At^2 + Bt + C) = 3t^2 + 1 \iff -2At^2 - 2(A+B)t + (2A - B - 2C) = 3t^2 - 1$$

$$\iff \begin{cases} -2A = 3 \\ -2A - 2B = 0 \\ 2A - B - 2C = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -3/2 \\ B = -A = 3/2 \\ C = -7/4 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y_p(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}.$$

La soluzione generale è ancora del tipo $y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t)$ dove $y_{(II)}(t)$ è come nell'esempio precedente. ■

Esempio

$$y''-y'-2y = \underbrace{3t^2-1}_{\substack{\text{Polinomio}\\ \text{del secondo}\\ \text{ordine}}} \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = At^2+Bt+C \quad , \ A, B, C \text{ da determinarsi}$$

Come prima calcoliamo $y_p'(t) = 2At+B$ e $y_p''(t) = 2A$ e inseriamole nell'eq. assegnata

segue:

$$2A - (2At+B) - 2(At^2+Bt+C) = 3t^2+1 \iff -2At^2 - 2(A+B)t + (2A-B-2C) = 3t^2-1$$

$$\iff \begin{cases} -2A = 3 \\ -2A-2B = 0 \\ 2A-B-2C = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -3/2 \\ B = -A = 3/2 \\ C = -7/4 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y_p(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}.$$

La soluzione generale è ancora del tipo $y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t)$ dove $y_{(II)}(t)$ è come nell'esempio precedente. ■

Esempio

$$y''-y'-2y = \underbrace{2t+1}_{\text{Polinomio}} \underbrace{-2e^t}_{\text{esponenziale}} \quad \text{visto che} \quad \bar{b}(t) = \bar{b}_1(t) + \bar{b}_2(t) \quad \text{con} \quad \boxed{\bar{b}_1(t) = 2t+1} \quad \text{e} \quad \boxed{\bar{b}_2(t) = -2e^t}$$

Esempio

$$\underbrace{y'' - y' - 2y = 3t^2 - 1}_{\text{Polinomio del secondo ordine}} \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + C \quad , \ A, B, C \text{ da determinarsi}$$

Come prima calcoliamo $y_p'(t) = 2At + B$ e $y_p''(t) = 2A$ e inserendole nell'eq. assegnata segue:

$$2A - (2At + B) - 2(At^2 + Bt + C) = 3t^2 + 1 \iff -2At^2 - 2(A+B)t + (2A - B - 2C) = 3t^2 - 1$$

$$\iff \begin{cases} -2A = 3 \\ -2A - 2B = 0 \\ 2A - B - 2C = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -3/2 \\ B = -A = 3/2 \\ C = -7/4 \end{cases} \text{ e quindi } y_p(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}.$$

La soluzione generale è ancora del tipo $y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t)$ dove $y_{(II)}(t)$ è come nell'esempio precedente. ∎

Esempio

$y'' - y' - 2y = \underbrace{2t+1}_{\text{Polinomio}} \underbrace{- 2e^t}_{\text{esponenziale}}$ visto che $\bar{b}(t) = \bar{b}_1(t) + \bar{b}_2(t)$ con $\bar{b}_1(t) = 2t+1$ e $\bar{b}_2(t) = -2e^t$

Allora possiamo usare la linearità dell'equazione assegnata e andare a determinare y_{P_1} sol. particolare di $y'' - y' - 2y = 2t+1$ e y_{P_2} sol. particolare di $y'' - y' - 2y = -2e^t$

e risulterà $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t)$

- Per $\boxed{y_{p_1}(t) = At + B} \Rightarrow y'_{p_1}(t) = A$ e $y''_{p_1}(t) = 0$ da cui: $-A - 2(At + B) = \underbrace{2t + 1}_{b_1(t)} \Leftrightarrow -(A + 2B) - 2At = 2t + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -A + 2B = 1 \\ -2A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -1 \end{cases}$$

Quindi $\boxed{y_{p_1}(t) = -t}$

e risulterà $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t)$

• Per $y_{p_1}(t) = At + B \Rightarrow y'_{p_1}(t) = A$ e $y''_{p_1}(t) = 0$ da cui: $-A - 2(At+B) = \underbrace{2t+1}_{b_1(t)} \Leftrightarrow -(A+2B) - 2At = 2t+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -A+2B = 1 \\ -2A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -1 \end{cases}$ Quindi $y_{p_1}(t) = -t$

• Per $\boxed{y_{p_2}(t) = ce^t} \Rightarrow y'_{p_2}(t) = ce^t$ e $y''_{p_2}(t) = ce^t$ da cui: $ce^t - ce^t - 2ce^t = \underbrace{-2e^t}_{b_2(t)}$

$\Leftrightarrow c = 1$ e quindi $\boxed{y_{p_2}(t) = e^t}$

Dai conti fatti segue che $\boxed{y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = -t + e^t.}$

e risulterà $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t)$

- Per $y_{p_1}(t) = At + B \Rightarrow y'_{p_1}(t) = A$ e $y''_{p_1}(t) = 0$ da cui: $-A - 2(At+B) = \underbrace{2t+1}_{b_1(t)} \Leftrightarrow -(A+2B) - 2At = 2t+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -A+2B = 1 \\ -2A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -1 \end{cases}$$ Quindi $y_{p_1}(t) = -t$

- Per $y_{p_2}(t) = ce^t \Rightarrow y'_{p_2}(t) = ce^t$ e $y''_{p_2}(t) = ce^t$ da cui: $ce^t - ce^t - 2ce^t = \underbrace{-2e^t}_{b_2(t)}$

$\Leftrightarrow c = 1$ e quindi $y_{p_2}(t) = e^t$

Dai conti fatti segue che $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = -t + e^t$. ∎

<u>Esempio</u>

$y'' - y' - 2y = 2\cos(3t) \Rightarrow \boxed{y_p(t) = A\cos(3t) + B\,\text{sen}(3t)}$ da cui $y'_p(t) = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)$

e $y''_p(t) = -9A\cos(3t) - 9B\,\text{sen}(3t)$ e inserendo y_p, y'_p, y''_p nell'eq. eseguente troviamo:

e risulterà $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t)$

- Per $y_{p_1}(t) = At + B \Rightarrow y'_{p_1}(t) = A$ e $y''_{p_1}(t) = 0$ da cui: $-A - 2(At+B) = \underbrace{2t+1}_{b_1(t)} \Leftrightarrow -(A+2B) - 2At = 2t+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -A+2B = 1 \\ -2A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -1 \end{cases}$$ Quindi $y_{p_1}(t) = -t$

- Per $y_{p_2}(t) = ce^t \Rightarrow y'_{p_2}(t) = ce^t$ e $y''_{p_2}(t) = ce^t$ da cui: $ce^t - ce^t - 2ce^t = \underbrace{-2e^t}_{b_2(t)}$

$\Leftrightarrow c = 1$ e quindi $y_{p_2}(t) = e^t$

Dai conti fatti segue che $y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = -t + e^t$. ∎

Esempio

$y'' - y' - 2y = 2\cos(3t) \Rightarrow y_p(t) = A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t)$ da cui $y'_p(t) = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)$

e $y''_p(t) = -9A\cos(3t) - 9B\,\mathrm{sen}(3t)$ e inserendo y_p, y'_p, y''_p nell'eq. assegnata troviamo:

$(-11A - 3B)\cos(3t) + (3A - 11B)\sin(3t) = 2\cos(3t) \Leftrightarrow \begin{cases} -11A - 3B = 2 \\ 3A - 11B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_p(t) = \overbrace{-\frac{11}{65}}^{A}\cos(3t) - \overbrace{\frac{3}{65}}^{B}\sin(3t)$ ∎

Esempio

$\boxed{y'' - 4y' + 4y = e^{t}}$ In questo caso l'eq. omogenea associata è: $y'' - 4y' + 4y = 0$

e l'eq. caratteristica è: $\underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 4}_{\text{quadrato perfetto}} = 0 \iff \underbrace{(\lambda - 2)^2 = 0}_{\Delta = 0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

quindi la soluzione generale dell'omogenea è $\boxed{y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}.}$

Esempio

$y'' - 4y' + 4y = e^t$ In questo caso l'eq. omogenea associata è: $y'' - 4y' + 4y = 0$

e l'eq. caratteristica è: $\underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 4}_{\text{quadrato perfetto}} = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\Delta = 0$

quindi la soluzione generale dell'omogenea è $y_o(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$.

· Per la soluzione particolare dell'eq. assegnata $\boxed{y_p(t) = A e^t} \Rightarrow y_p'(t) = A e^t$ e $y_p''(t) = A e^t$.

Esempio

$y'' - 4y' + 4y = e^t$ In questo caso l'eq. omogenea associata è : $y'' - 4y' + 4y = 0$

e l'eq. caratteristica è : $\underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 4}_{\text{quadrato perfetto}} = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\Delta = 0$

quindi la soluzione generale dell'omogenea è $y_{(II)}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$.

· Per la soluzione particolare dell'eq. assegnata $y_p(t) = A e^t \Rightarrow y_p'(t) = A e^t$ e $y_p''(t) = A e^t$.

Inserendo y_p, y_p', y_p'' in $y'' - 4y' + 4y = e^t \Rightarrow$ otteniamo : $Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = e^t \iff A = 1$

quindi $\boxed{y_p(t) = e^t}$

La soluzione generale $\boxed{y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + e^t}$ ■

Esempio

$y'' - 4y' + 4y = e^t$ In questo caso l'eq. omogenea associata è : $y'' - 4y' + 4y = 0$

e l'eq. caratteristica è : $\underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 4}_{\text{quadrato perfetto}} = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\Delta = 0$

quindi la soluzione generale dell'omogenea è $y_{(II)}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$.

· Per la soluzione particolare dell'eq. assegnata $y_p(t) = Ae^t \Rightarrow y_p'(t) = Ae^t$ e $y_p''(t) = Ae^t$.

Inserendo y_p, y_p', y_p'' in $y'' - 4y' + 4y = e^t \Rightarrow$ otteniamo: $Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = e^t \iff A = 1$

quindi $y_p(t) = e^t$

La soluzione generale $y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + e^t$ ■

Proposizione

Sia $ay'' + by' + cy = b(t)$ con $b(t) = p(t) e^{\bar{\lambda} t}$ con polinomio di grado k, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Allora $y_p(t)$ è del tipo:

1. $y_p(t) = q(t) e^{\bar{\lambda} t}$, se $\bar{\lambda}$ non risolve l'eq. caratteristica
2. $y_p(t) = t^{\sigma} q(t) e^{\bar{\lambda} t}$, se $\bar{\lambda}$ risolve l'eq. caratteristica con molteplicità σ (caso risonante)

} $q(t)$ polinomio di grado k in t come $p(t)$.

Esempio

$\boxed{y'' - 4y' + 4y = e^{2t}}$ $\Rightarrow$ l'eq. caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$ $\boxed{\text{e } \bar{\lambda} \text{ è una soluzione con molteplicità } \sigma = 2}$

qui $\bar{\lambda} = 2$

Esempio

$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$ $\Rightarrow$ l'eq. caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$ e $\bar{\lambda}$ è una soluzione con molteplicità $\sigma = 2$

qui $\bar{\lambda} = 2$

Allora $\boxed{y_p(t) = A t^2 e^{2t}}$ $\Rightarrow$ $y_p'(t) = 2A\left(t e^{2t} + t^2 e^{2t}\right) = 2Ate^{2t}(1+t)$

$y_p''(t) = 2A\left[e^{2t}(1+t) + 2te^{2t}(1+t) + te^{2t}\right]$

$= 2Ae^{2t}(1 + 4t + 2t^2)$

Esempio

$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \Rightarrow$ l'eq. caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda-2)^2 = 0$ e $\bar{\lambda}$ è una soluzione con molteplicità $\sigma = 2$

qui $\bar{\lambda} = 2$

Allora $y_p(t) = A t^2 e^{2t} \Rightarrow y_p'(t) = 2A\left(t e^{2t} + t^2 e^{2t}\right) = 2Ate^{2t}(1+t)$

$$y_p''(t) = 2A\left[e^{2t}(1+t) + 2te^{2t}(1+t) + te^{2t}\right]$$

$$= 2Ae^{2t}(1+4t+2t^2)$$

Inserendo $y_p(t)$ con le sue derivate nell'eq. assegnata troviamo:

$$\boxed{2Ae^{2t}(1+4t+2t^2) - 8Ate^{2t}(1+t) + 4t^2e^{2t} = e^{2t}}$$

$$\iff 2Ae^{2t} + 8Ate^{2t} - 8Ate^{2t} = e^{2t} \iff 2Ae^{2t} = e^{2t} \iff \boxed{A = 1/2 \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{2t}}$$

Esempio

$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$ $\Rightarrow$ l'eq. caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0$ e $\bar{\lambda}$ è una soluzione con molteplicità $\sigma = 2$

qui $\bar{\lambda} = 2$

Allora $y_p(t) = A t^2 e^{2t}$ $\Rightarrow$ $y_p'(t) = 2A\left(t e^{2t} + t^2 e^{2t}\right) = 2Ate^{2t}(1+t)$

$$y_p''(t) = 2A\left[e^{2t}(1+t) + 2te^{2t}(1+t) + te^{2t}\right]$$

$$= 2Ae^{2t}\left(1 + 4t + 2t^2\right)$$

Inserendo $y_p(t)$ con le sue derivate nell'eq. assegnata troviamo:

$$2Ae^{2t}(1 + 4t + 2t^2) - 8Ate^{2t}(1+t) + 4t^2e^{2t} = e^{2t}$$

$$\iff 2Ae^{2t} + 8Ate^{2t} - 8Ate^{2t} = e^{2t} \iff 2Ae^{2t} = e^{2t} \iff A = 1/2 \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{2t}$$

Quindi $\boxed{y_{(I)}(t) = y_{(II)}(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}.}$ ∎

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie

- Si applica alle eq. del tipo $ay'' + by' + cy = \bar{b}(t)$ con $\bar{b}(t)$ "generica" continua. (Vale anche per $a = a(t)$, $b = b(t)$)
- Siano y_1 e y_2 due soluzioni Linearmente Indipendenti per $ay'' + by' + cy = 0$, allora

$\boxed{y_p(t) = v_1(t)\, y_1(t) + v_2(t)\, y_2(t)}$ con $v_1(t)$ e $v_2(t)$ funzioni tali che:

Metodo delle variazione delle costanti arbitrarie

- Si applica alle eq. del tipo $a y'' + b y' + c y = \bar{b}(t)$ con $\bar{b}(t)$ "generica" continua. (Vale anche per $a = a(t)$, $b = b(t)$)
- Siano y_1 e y_2 due soluzioni Linearmente Indipendenti per $a y'' + b y' + c y = 0$, allora

$y_p(t) = v_1(t)\, y_1(t) + v_2(t)\, y_2(t)$ con $v_1(t)$ e $v_2(t)$ funzioni tali che:

$$\boxed{v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{b} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} = -\frac{y_2 \bar{b}}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \; ; \; v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{b} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} = \frac{y_1 \bar{b}}{y_1 y_2' - y_1' y_2}} \quad (IV)$$

Metodo delle variazione delle costanti arbitrarie

- Si applica alle eq. del tipo $a y'' + b y' + c y = \bar{b}(t)$ con $\bar{b}(t)$ "generica" continua. (Vale anche per $a = a(t)$, $b = b(t)$)
- Siano y_1 e y_2 due soluzioni Linearmente Indipendenti per $a y'' + b y' + c y = 0$, allora

$y_p(t) = v_1(t)\, y_1(t) + v_2(t)\, y_2(t)$ con $v_1(t)$ e $v_2(t)$ funzioni tali che:

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{b} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = -\frac{y_2 \bar{b}}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \ ; \quad v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{b} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{y_1 \bar{b}}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \qquad (IV)$$

Esempio

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$$

in questo caso l'eq. omogenea associata è $y'' - 2y' + y = 0$ e $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ è l'eq. caratteristica

- Quindi $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$ e di conseguenza $y_1 = e^t$, $y_2 = t e^t$ e $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = (t+1)e^{2t} - te^{2t} = e^{2t}$

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie

- Si applica alle eq. del tipo $a y'' + b y' + c y = \bar{b}(t)$ con $\bar{b}(t)$ "generica" continua. (Vale anche per $a = a(t)$, $b = b(t)$)
- Siano y_1 e y_2 due soluzioni Linearmente Indipendenti per $a y'' + b y' + c y = 0$, allora

$y_p(t) = v_1(t) y_1(t) + v_2(t) y_2(t)$ con $v_1(t)$ e $v_2(t)$ funzioni tali che:

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{b} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = -\frac{y_2 \bar{b}}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \quad ; \quad v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{b} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{y_1 \bar{b}}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \qquad \text{(IV)}$$

Esempio

$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$ in questo caso l'eq. omogenea associata è $y'' - 2y' + y = 0$ e $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ è l'eq. caratteristica

- Quindi $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$ e di conseguenza $y_1 = e^t$, $y_2 = t e^t$ e $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & t e^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix}$

$= (t+1)e^{2t} - t e^{2t} = e^{2t}$

Allora dalla (IV)

$$\boxed{\begin{aligned} v_1'(t) &= -\frac{y_2 \bar{b}}{e^{2t}} = -\frac{e^{2t} t / (1+t^2)}{e^{2t}} = -\frac{t}{1+t^2} \\ \Rightarrow v_1(t) &= -\int \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \cancel{c} \end{aligned}}$$

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie

- Si applica alle eq. del tipo $ay''+by'+cy=\bar{b}(t)$ con $\bar{b}(t)$ "generica" continua. (Vale anche per $a=a(t)$, $b=b(t)$)
- Siano y_1 e y_2 due soluzioni linearmente indipendenti per $ay''+by'+cy=0$, allora

$y_p(t)=v_1(t)y_1(t)+v_2(t)y_2(t)$ con $v_1(t)$ e $v_2(t)$ funzioni tali che:

$$v_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ \bar{b} & y_2'\end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)}=-\frac{y_2\bar{b}}{y_1y_2'-y_1'y_2}\ ;\quad v_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & \bar{b}\end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)}=\frac{y_1\bar{b}}{y_1y_2'-y_1'y_2}\qquad (IV)$$

Esempio

$y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$ in questo caso l'eq. omogenea associata è $y''-2y'+y=0$ e $\lambda^2-2\lambda+1=0$ è l'eq. caratteristica

- Quindi $\lambda^2-2\lambda+1=0 \iff (\lambda-1)^2=0$ e di conseguenza $y_1=e^t$, $y_2=te^t$ e $W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix}e^t & te^t\\ e^t & (1+t)e^t\end{vmatrix}$

$=(t+1)e^{2t}-te^{2t}=e^{2t}$

Allora dalla (IV) $v_1'(t)=-\dfrac{y_2\bar{b}}{e^{2t}}=-\dfrac{e^{2t}t/(1+t^2)}{e^{2t}}=-\dfrac{t}{1+t^2}$

$$\Rightarrow v_1(t)=-\int\frac{t}{1+t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\cancel{c}$$

$$\boxed{v_2'(t)=\frac{y_1\bar{b}}{e^{2t}}=\frac{e^{2t}/(1+t^2)}{e^{2t}}=\frac{1}{1+t^2}\Rightarrow v_2(t)=\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\arctan(t)+\cancel{c}}$$

$\Big\}\ y_p(t)=v_1y_1+v_2y_2 \Rightarrow$

$\boxed{y_p(t) = -\frac{1}{2}e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)}$ e quindi $\boxed{y_{G}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \left(-\frac{1}{2}e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)\right)}$ ■

$y_p(t) = -\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)$ e quindi $y_{(II)}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \left(-\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)\right)$ ■

Esempio

Consideriamo $\boxed{y'' - y = \frac{1}{1+e^t}}$ $\Rightarrow$ l'eq. omogenea associata è: $y'' - y = 0$ e quindi $\lambda^2 - 1 = 0$ è l'eq. caratteristica

$\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$ da cui $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$ e $\boxed{W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2}$

$\left(y_{(II)}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \right)$

$y_p(t) = -\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)$ e quindi $y_{(II)}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \left(-\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)\right)$ ■

Esempio

Consideriamo $y'' - y = \frac{1}{1+e^t}$ $\Rightarrow$ l'eq. omogenea associata è: $y'' - y = 0$ e quindi $\lambda^2 - 1 = 0$ è l'eq. caratteristica

$\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$ da cui $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$ e $W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2$

$\left(y_{(II)}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \right)$

$\boxed{y_p(t) = v_1(t)\, y_1(t) + v_2(t)\, y_2(t)}$ con
$$\boxed{\begin{aligned} v_1'(t) &= -\frac{y_2 \bar{b}}{-2} = \frac{e^{-t}}{2(1+e^t)} = \frac{1}{2e^t(1+e^t)} \\ v_2'(t) &= \frac{y_1 \bar{b}}{-2} = -\frac{e^t}{2(1+e^t)} \end{aligned}}$$

$y_p(t) = -\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)$ e quindi $y_{(I)}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \left(-\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)\right)$ ■

Esempio

Consideriamo $y'' - y = \frac{1}{1+e^t}$ $\Rightarrow$ l'eq. omogenea associata è: $y'' - y = 0$ e quindi $\lambda^2 - 1 = 0$ è l'eq. caratteristica

$\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ da cui $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$ e $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2$

$\left(y_{(II)}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \right)$

$y_p(t) = v_1(t) y_1(t) + v_2(t) y_2(t)$ con $v_1'(t) = -\frac{y_2 \bar{b}}{-2} = \frac{e^{-t}}{2(1+e^t)} = \frac{1}{2e^t(1+e^t)}$

$v_2'(t) = \frac{y_1 \bar{b}}{-2} = -\frac{e^t}{2(1+e^t)}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^t(1+e^t)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+e^t}{e^t(1+e^t)}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+e^t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\left(t - \ln(1+e^t)\right) + \cancel{c} \\ v_2(t) &= -\frac{1}{2}\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(1+e^t) + \cancel{c} \end{aligned}}$$

$y_p(t) = -\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)$ e quindi $y_{(I)}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \left(-\frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan(t)\right)$ ■

Esempio

Consideriamo $y'' - y = \frac{1}{1+e^t}$ $\Rightarrow$ l'eq. omogenea associata è: $y'' - y = 0$ e quindi $\lambda^2 - 1 = 0$ è l'eq. caratteristica

$\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$ da cui $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$ e $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2$

$\left(y_{(II)}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \right)$

$y_p(t) = v_1(t) y_1(t) + v_2(t) y_2(t)$ con $v_1'(t) = -\frac{y_2 \bar{b}}{-2} = \frac{e^{-t}}{2(1+e^t)} = \frac{1}{2e^t(1+e^t)}$

$v_2'(t) = \frac{y_1 \bar{b}}{-2} = -\frac{e^t}{2(1+e^t)}$

$v_1(t) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^t(1+e^t)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+e^t}{e^t(1+e^t)}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+e^t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\left(t - \ln(1+e^t)\right) + \cancel{c}$

$v_2(t) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(1+e^t) + \cancel{c}$

Quindi $y_p(t) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{2} e^t \ln(1+e^t)\right) - \frac{1}{2} e^{-t} \ln(1+e^t)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^t \ln(1+e^{-t}) - \frac{1}{2} e^{-t} \ln(1+e^t)$ ■