SUGGERIMENTI ESERCIZI SU INTEGRALI IMPROPRI

1. $$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^{\alpha} \cos(x^2)\, dx \qquad \alpha \geq 0$$

PER SOSTITUZIONE $x^2 = t$ $\quad x = \sqrt{t}$ $\quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. L'INTEGRALE DIVENTA

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{t}\right)^{\alpha} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\, dt$$

LA FUNZIONE $\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{t}\right)^{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{t}}$ È DECRESCENTE E $\to 0$ PER $t \to +\infty$

INOLTRE LA FUNZIONE

$$\int_1^{x} \cos t\, dt \quad \text{È LIMITATA.}$$

ALLORA L'INTEGRALE CONV. $\forall\, \alpha \geq 0$. PER IL CRITERIO DI DIRICHLET/ABEL.

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{(e^x - 1)^{\alpha}}$$

SI HA $e^x - 1 \geq 0 \ \forall x \in (0,1]$ E $e^x - 1 = O(x)$ $x \to 0$.

ALLORA L'INTEGRALE CONV. $\iff \alpha < 1$

PER $\alpha = \frac{1}{3}$, SE $c \in (0,1)$

$$\int_c^1 \frac{dx}{(e^x-1)^{\frac{1}{3}}} = \int_c^1 \frac{e^x}{e^x (e^x - 1)^{\frac{1}{3}}}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_{e^c}^{e} \frac{dt}{t(t-1)^{\frac{1}{3}}} \underset{\uparrow}{=} \int_{(e^c-1)^{\frac{1}{3}}}^{(e-1)^{\frac{1}{3}}} \frac{3y^2}{(y^3+1)y}\, dy$$

$t = e^x$ $\qquad$ $t = y^3 + 1$

$dt = e^x\, dx$ $\qquad$ $dt = 3y^2\, dy$

$$= 3\int_{(e^c-1)^{\frac{1}{3}}}^{(e-1)^{\frac{1}{3}}} \frac{y}{y^3+1}\,dy$$

SI HA: $y^3+1 = (y+1)(y^2-y+1)$

SCRIVERE

$$\frac{y}{y^3+1} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2-y+1}$$

DETERMINARE UNA PRIMITIVA DI $\frac{y}{y^3+1}$, CALCOLARE $3\int_{(e^c-1)^{\frac{1}{3}}}^{(e-1)^{\frac{1}{3}}} \frac{y}{y^3+1}\,dy$

E POI CALCOLARE $\lim_{c\to 0^+} \int_{(e^c-1)^{\frac{1}{3}}}^{(e-1)^{\frac{1}{3}}} \dots\,dy$

(SI VEDA ANCHE ES. SUCCESSIVO).

3. $$\int_3^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2-2}\,dx$$

SI HA $\frac{x}{x^3+x^2-2} > 0$ SE $x \geq 3$ E $\frac{x}{x^3+x^2-2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $x \to +\infty$

ALLORA L'INTEGRALE È CONVERGENTE.

SI HA $x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2)$

SI DETERMINANO A, B, C T.C.

$$\frac{x}{x^3+x^2-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

SI OTTIENE ③

$$\frac{x}{x^3+x^2-2} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2-x}{x^2+2x+2}\right)$$

SI HA $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\,dx = \lg(x-1)+K$ SU $(3,+\infty)$

$$\int \frac{-x+2}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + 3\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+2x+2}_{=(x+1)^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lg(x^2+2x+2) + 3\,\mathrm{arctg}(x+1) + K$$

QUINDI

$$\int_3^c \frac{x}{x^3+x^2-2}\,dx = \frac{1}{5}\Big[\lg(c-1) - \lg 2 - \frac{1}{2}\lg(c^2+2c+2) + \frac{1}{2}\lg(17)$$

$$+3\,\mathrm{arctg}(c+1) - 3\,\mathrm{arctg}\,4\Big]$$

DA CUI

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2-2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_3^c \frac{x}{x^3+x^2-2}\,dx =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{5}\Big[\cancel{\lg c} + \lg\big(1-\tfrac{1}{c}\big)^{\to 0} - \lg 2 - \cancel{\lg c} - \frac{1}{2}\lg\big(1+\tfrac{2}{c}+\tfrac{2}{c^2}\big)^{\to 0}$$

$$+\frac{1}{2}\lg(17) + \underbrace{3\,\mathrm{arctg}(c+1)}_{\to\frac{\pi}{2}} - 3\,\mathrm{arctg}\,4\Big] =$$

$$= \frac{1}{5}\Big[-\lg 2 + \frac{1}{2}\lg(17) + \frac{3}{2}\pi - 3\,\mathrm{arctg}\,4\Big]$$

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} x\, e^{-(\lg x)^\alpha}\, dx$

SI HA $\quad x\, e^{-(\lg x)^\alpha} > 0 \quad \forall \ x \geq 2.$

SIA $\beta > 0$. SI HA

$$\frac{x\, e^{-(\lg x)^\alpha}}{\frac{1}{x^\beta}} = e^{(1+\beta)\lg x - (\lg x)^\alpha} = e^{(\lg x)^\alpha\left((1+\beta)(\lg x)^{1-\alpha} - 1\right)}$$

SE $\boxed{\alpha > 1}$ SCEGLIAMO, PER ES., $\beta = 2$.

ALLORA

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{(\lg x)^\alpha}^{\to+\infty}\left(3\overbrace{(\lg x)^{1-\alpha}}^{\to 0} - 1\right)} = 0$$

QUINDI $\quad x\, e^{-(\lg x)^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$ L'INTEGRALE <u>CONV.</u>

SE $\boxed{\alpha < 1}$, SCEGLIAMO, PER ES., $\beta = 1$.

ALLORA

$$\lim_{x\to+\infty} e^{(\lg x)^\alpha\left(2\overbrace{(\lg x)^{1-\alpha}}^{\to+\infty} - 1\right)} = +\infty$$

QUINDI $\quad \frac{1}{x} = o\left(x\, e^{-(\lg x)^\alpha}\right) \Rightarrow$ L'INTEGRALE <u>DIV.</u>

SE $\boxed{\alpha = 1}$ SI HA

$$x\, e^{-\lg x} \equiv 1 \qquad \Rightarrow \text{L'INTEGRALE DIV}$$

5. $$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

OSSERVIAMO CHE

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0.$$

INFATTI, CONSIDERIAMO LA FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$$

PER DEFINIZIONE DI INTEGRALE IMPROPRIO,

$$\exists \lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

ALLORA

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \lim_{c \to +\infty} \int_x^c e^{-t^2}\,dt = \lim_{c \to +\infty} \left(F(c) - F(x)\right)$$

2° TEO. FOND. C.I.

$$= \ell - F(x)$$

DA CUI

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \ell - F(x) = \ell - \ell = 0.$$

ALLORA

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}{e^{-x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell - F(x)}{e^{-x^2}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^{-x^2}}{-2xe^{-x^2}} = 0$$

HOPITAL

+ TEO FOND. C. I.

QUINDI $f(x)$ È UN INFINITESIMO PER $x \to +\infty$.

PER DETERMINARNE L'ORDINE, SI CERCA $\alpha > 0$ T.C.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \in \mathbb{R}, \neq 0.$$

SI HA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt}{x^{-\alpha} e^{-x^2}} \underset{\uparrow}{=}$$

HOPITAL

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^{-x^2}}{x^{-\alpha}(-2x)e^{-x^2} - \alpha x^{-\alpha-1} e^{-x^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{SE } \alpha = 1.$$

QUINDI L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $f(x)$ PER $x \to +\infty$ È 1.

INOLTRE, SI HA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} = 1.$$

QUINDI LA PARTE PRINCIPALE DI f È $\frac{1}{2x}$.