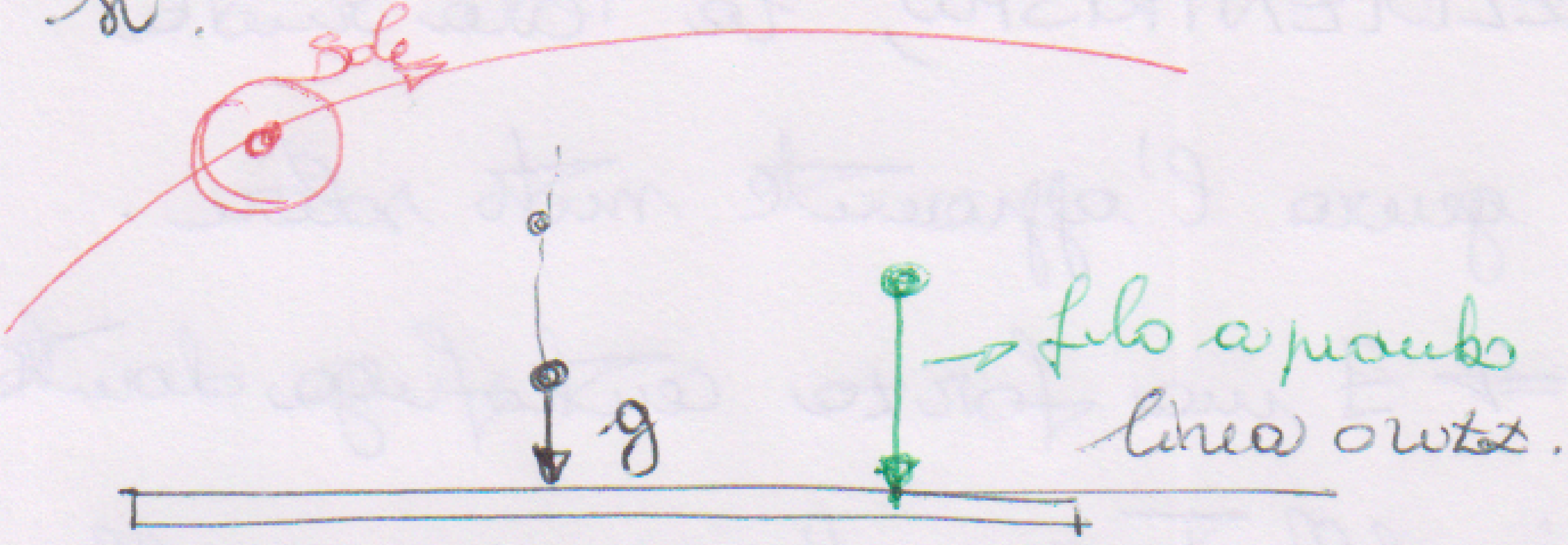
Modello terrestre

La scienza predilige modelli semplici (se funzionano...)

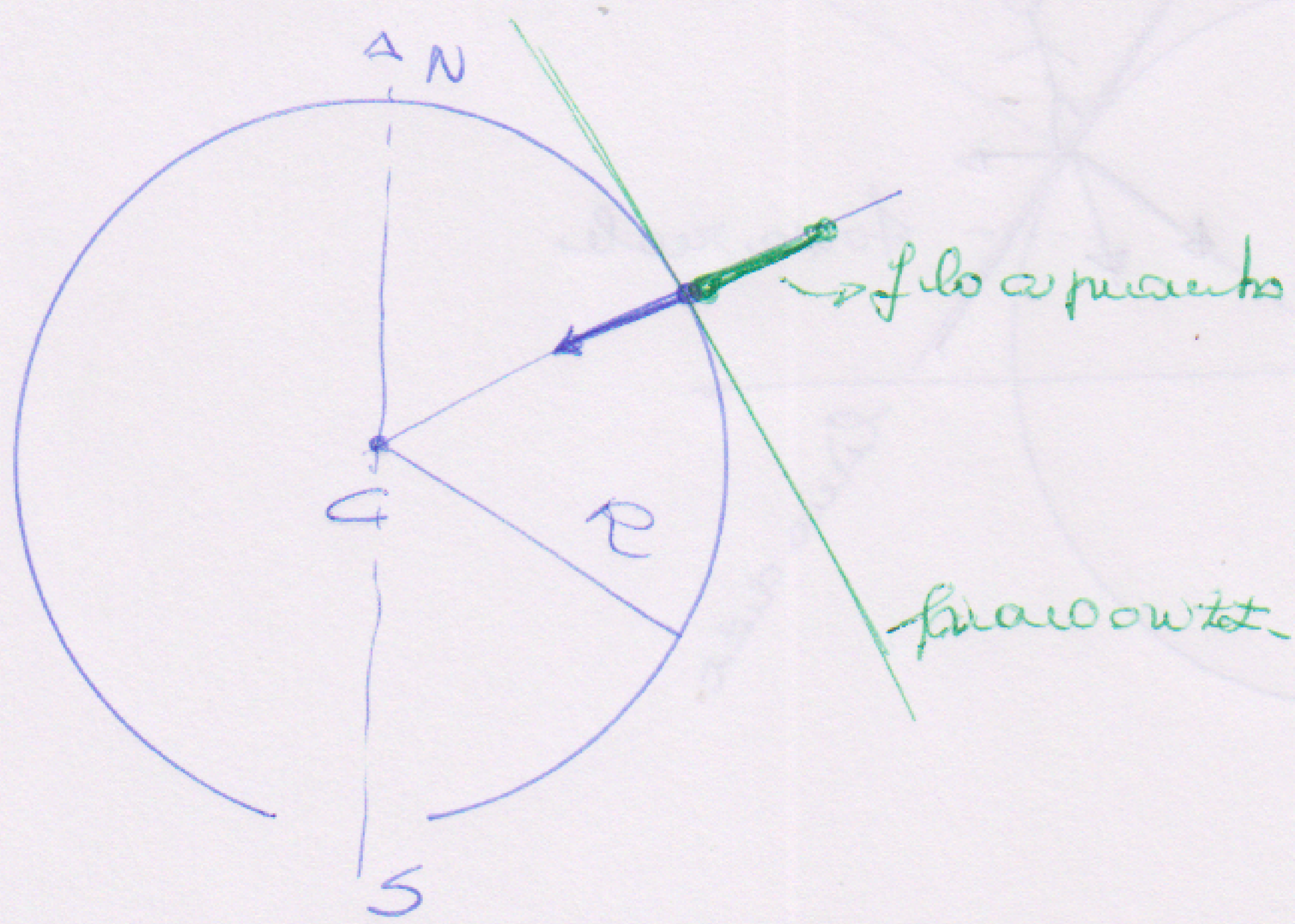
Domanda: La Terra è piatta? A prima vista sì.



$$\vec{g} = -g\vec{k} \qquad g = 9{,}8\ m/s^2$$

Filo a piombo ⊥ con piano dell'orizzonte

Esiste anche il modello che prende la terra sferica



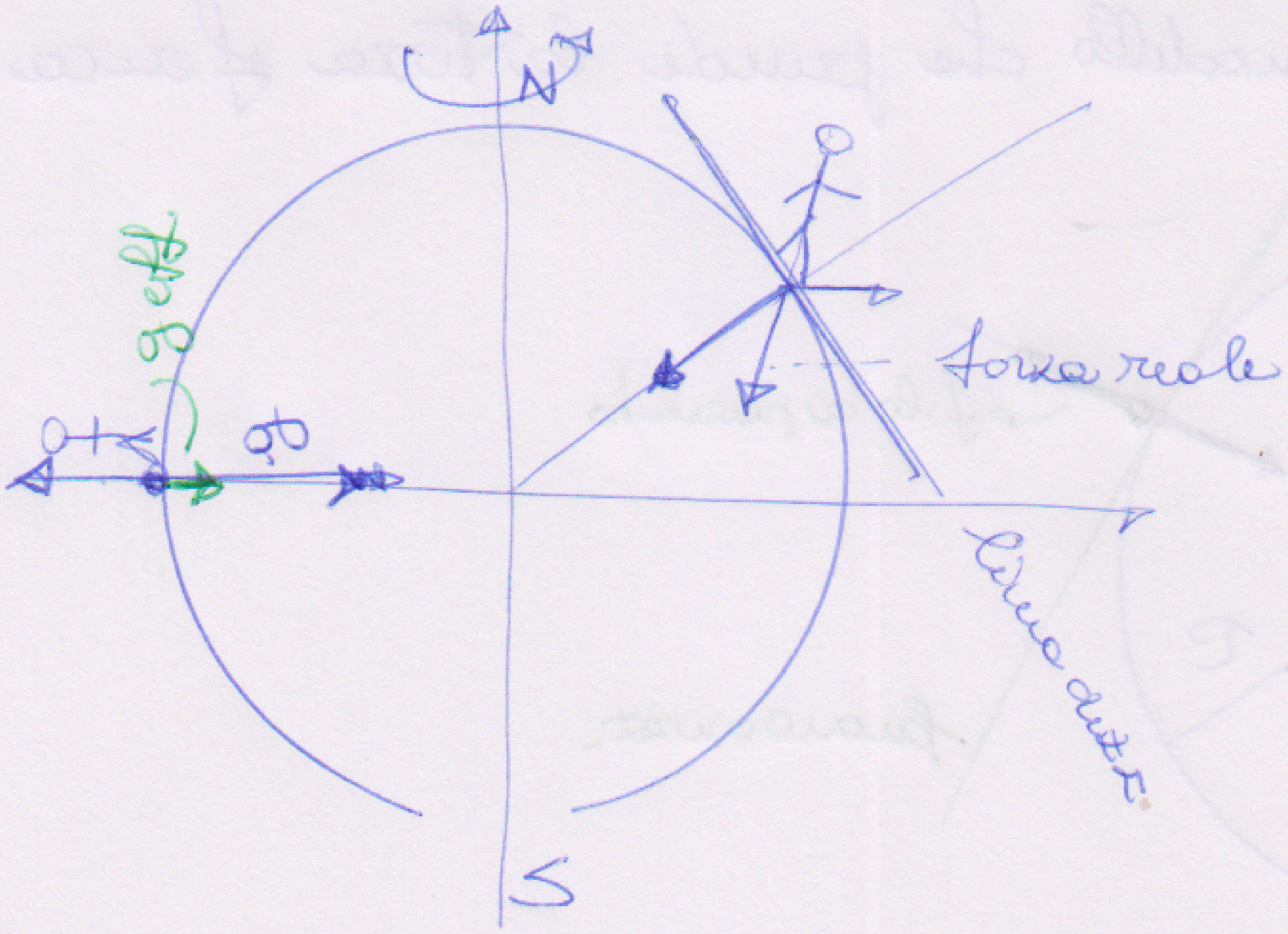
In questo modello la f. grav. spinge verso il centro della sfera, se R è suff. grande, il piano tg sarà ⊥ alla direzione (locale) di $\vec{g}$ e non riesco più a distinguere fra i 2 modelli.

Per poterli distinguere devo aggiungere il SOLE.

Caso terra piatta GEOCENTRISMO → OK ma trovo incongruenze (a parte spiegare come fa il SOLE a passare sotto la Terra)

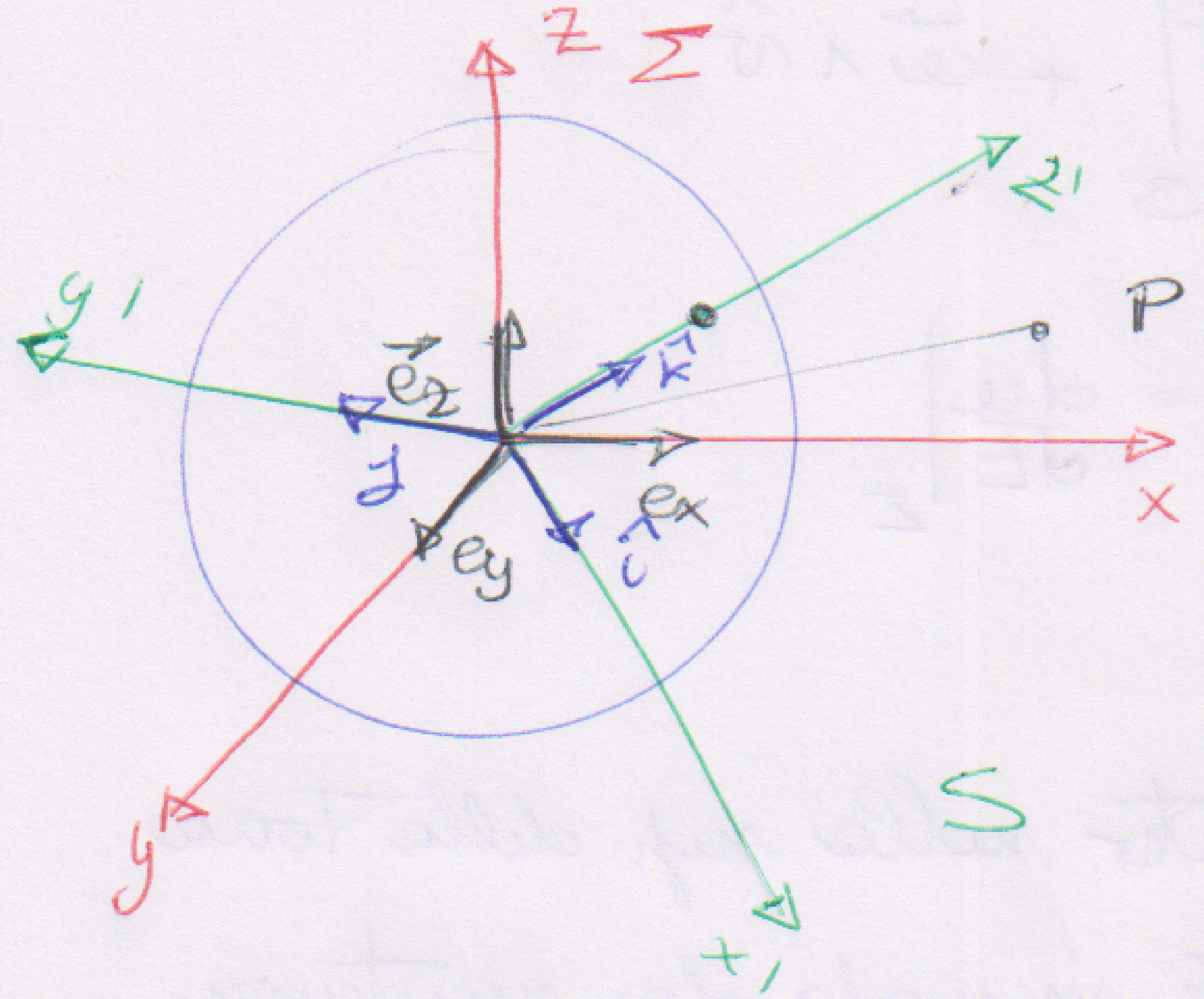
Caso Terra sferica ELIOCENTRISMO, la Terra ruota attorno all'asse N-S che genera l'apparente moto solare.

Effetto collaterale ⇒ ∃ una forza centrifuga dovuta al movimento rotatorio della Terra che si somma alla f. di gravità e
1) devia direz. filo a piombo
2) Modifica il "peso" delle "cose"



Non sento né l'uno né l'altro effetto: ho falsificato il modello della Terra sferica

Riferimenti mobili e forze apparenti



$$P-O = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$$
$$= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Per il sistema di rif. inerziale Σ: $\vec{F} = m\vec{a}$

con $a = \ddot{P} = \ddot{x}'\vec{e}_x + \ddot{y}'\vec{e}_y + \ddot{z}'\vec{e}_z$

F è la forza agente su P misurata dall'osservatore inerziale

Per il sistema mobile, le eq. di Newton si scrivono

$$m\vec{a}\Big|_S = \vec{F} - m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_S \wedge \vec{r}\right) - \underbrace{2m\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{x}}{dt}\Big|_S\right)}_{\text{F. Coriolis}} -$$

$$\underbrace{- m\,\omega \wedge (\omega \wedge r)}_{\text{F. centrifuga}}$$

dove

$$v\Big|_S = \frac{d(P-O)}{dt}\Big|_S = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \qquad a\Big|_S = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

ω: Teorema Poincaré

$$\left.\frac{d\hat{v}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\hat{v}}{dt}\right|_{S} + \vec{\omega} \wedge \hat{v}$$

e ricordiamo $\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{S} = \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\Sigma}$

Consideriamo un punto sulla sup. della Terra e sistema S ruotante in modo da mantenere $P-O = R\,\hat{k}$ avendo asse z diretto dal centro al punto.

$\vec{\omega}$ esprime la rotazione della terra $\Rightarrow \dot{\omega} = 0$

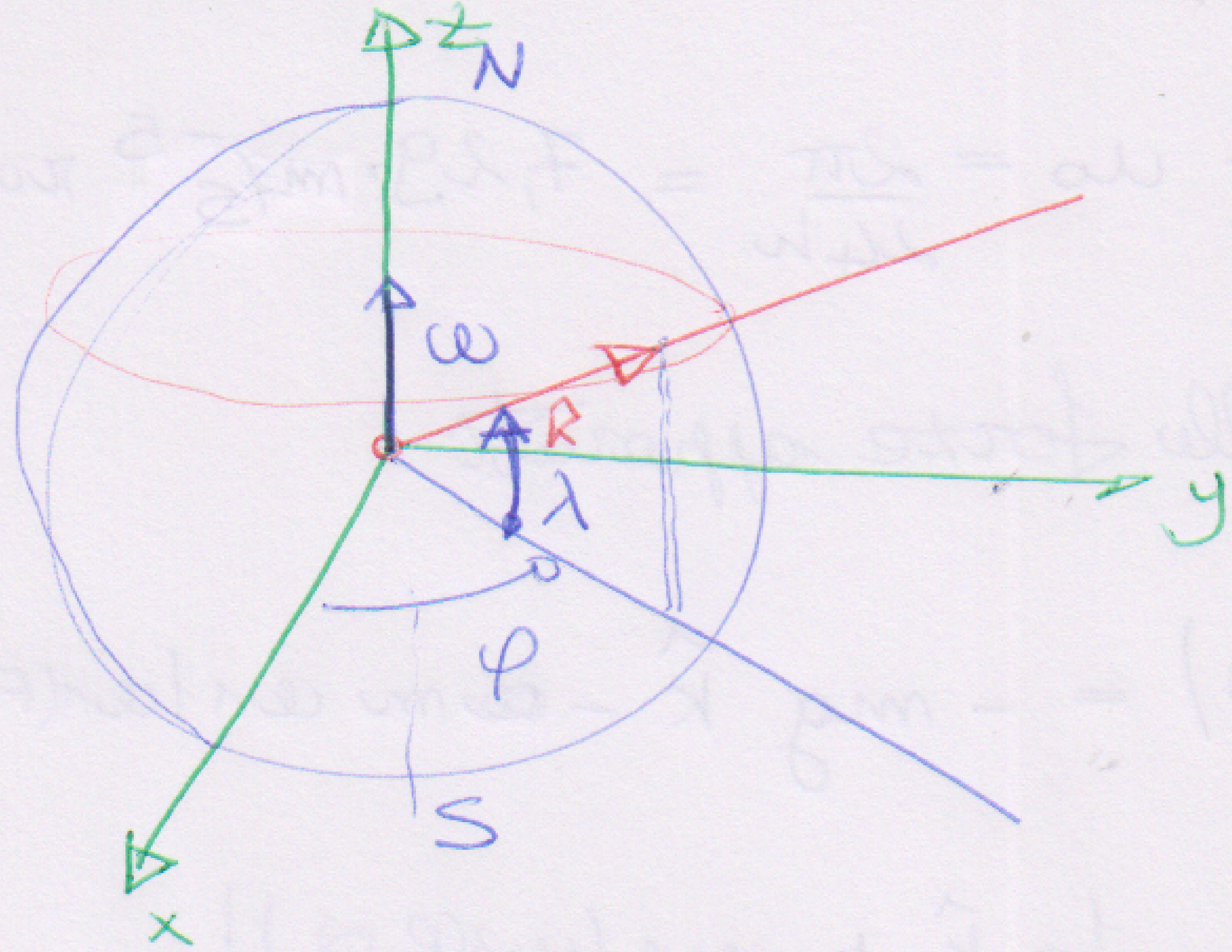
e per costruzione $v_P|_S = 0$

$$m\,a|_S = \vec{F} - m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-O))$$

in cui $F = -mg\,\hat{k}$ $\Rightarrow$ lungo la direz. mobile

in generale, dato $a|_S = 0$ devo considerare la reazione del terreno che compensa le accel. esterne

Calcoliamo $\vec{\omega}$ della Terra, visto che ruota attorno asse N-S $\Rightarrow \vec{\omega} = \omega_0\,\hat{e}_z$



λ angolo latitudine $\qquad \varphi = \varphi(t)$

$$\hat{k} = \hat{e}_z \,\mathrm{sen}\lambda + \cos\lambda \left(\vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi \right)$$

$$\omega \wedge \hat{k} = \omega_0 \, \hat{e}_z \wedge k =$$

$$= \omega_0 \cos\lambda \, \hat{e}_z \wedge \left(\vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi \right) =$$

$$= \omega_0 \cos\lambda \left(\vec{e}_y \cos\varphi - \vec{e}_x \sin\varphi \right)$$

$$\left.\frac{d\hat{k}}{dt}\right|_Z = \cos\lambda \left(-\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi \right) \dot{\varphi}$$

$$\left.\frac{d\hat{k}}{dt}\right|_Z = \cancel{\left.\frac{d\hat{k}}{dt}\right|_S} + \vec{\omega} \wedge \hat{k}$$

$$\cos\lambda \, \dot{\varphi} \left(-\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi \right) = \omega_0 \cos\lambda \left(-\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi \right)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

Periodicità giornaliera $\qquad T = 24\,h \qquad \varphi = 2\pi + \omega_0$

$$\omega_0 \cdot 24h = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{24h} = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \,\mathrm{rad/s}$$

Tornando all'eq. delle forze apparenti

$$F - m\,\hat{\omega} \wedge (\omega \wedge (P-O)) = -mg\,\hat{k} - m\,\omega \wedge (\omega \wedge (P-O))$$

$$= m\vec{g}' \quad \text{con} \quad \vec{g}' = -\left(g\,\hat{k} + \omega \wedge (\omega \wedge (P-O))\right)$$

$\Downarrow$

forza gravitazionale "corretta" dalla rotazione terrestre

Calcoliamo $\omega \wedge (\underbrace{\omega \wedge (P-O)}) =$

$\underbrace{}_{R\,\hat{k}}$

$$= R\,\omega_0\,\vec{e}_z \wedge \left(\omega_0 \cos\lambda\,(\vec{e}_y \cos\varphi - \vec{e}_x \sin\varphi)\right)$$

$$= R\omega_0^2 \cos\lambda\,(-\vec{e}_x \cos\varphi - \vec{e}_y \sin\varphi)$$

confrontiamo con

$$\hat{k} = \hat{e}_z \sin\lambda + \underbrace{\cos\lambda\,(\vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi)}_{\text{Proiez. di } \vec{z} \text{ sul piano } x,y \perp \text{a } \omega}$$

quindi

$$\vec{g}' = -\left(g\,\hat{e}_z \sin\lambda + \hat{k}_\perp \left(g - R\omega_0^2\right)\right)$$

$$\vec{k}_\perp = \cos\lambda\,(\vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi)$$

$$\hat{k} = \hat{e}_z \sin\lambda + \hat{k}_\perp$$

$$|\vec{g}'| = \sqrt{(g\sin\lambda)^2 + (g - R\omega_0^2)^2 |\hat{k}_\perp|^2}$$

$$|\vec{k}_\perp|^2 = \cos^2\lambda$$

$$|g'| = \sqrt{g^2\sin^2\lambda + (g^2 + R^2\omega_0^4 - 2R\omega_0^2 g)\cos^2\lambda}$$

$$= \sqrt{g^2 + (R^2\omega_0^4 - 2R\omega_0^2 g)\cos^2\lambda} =$$

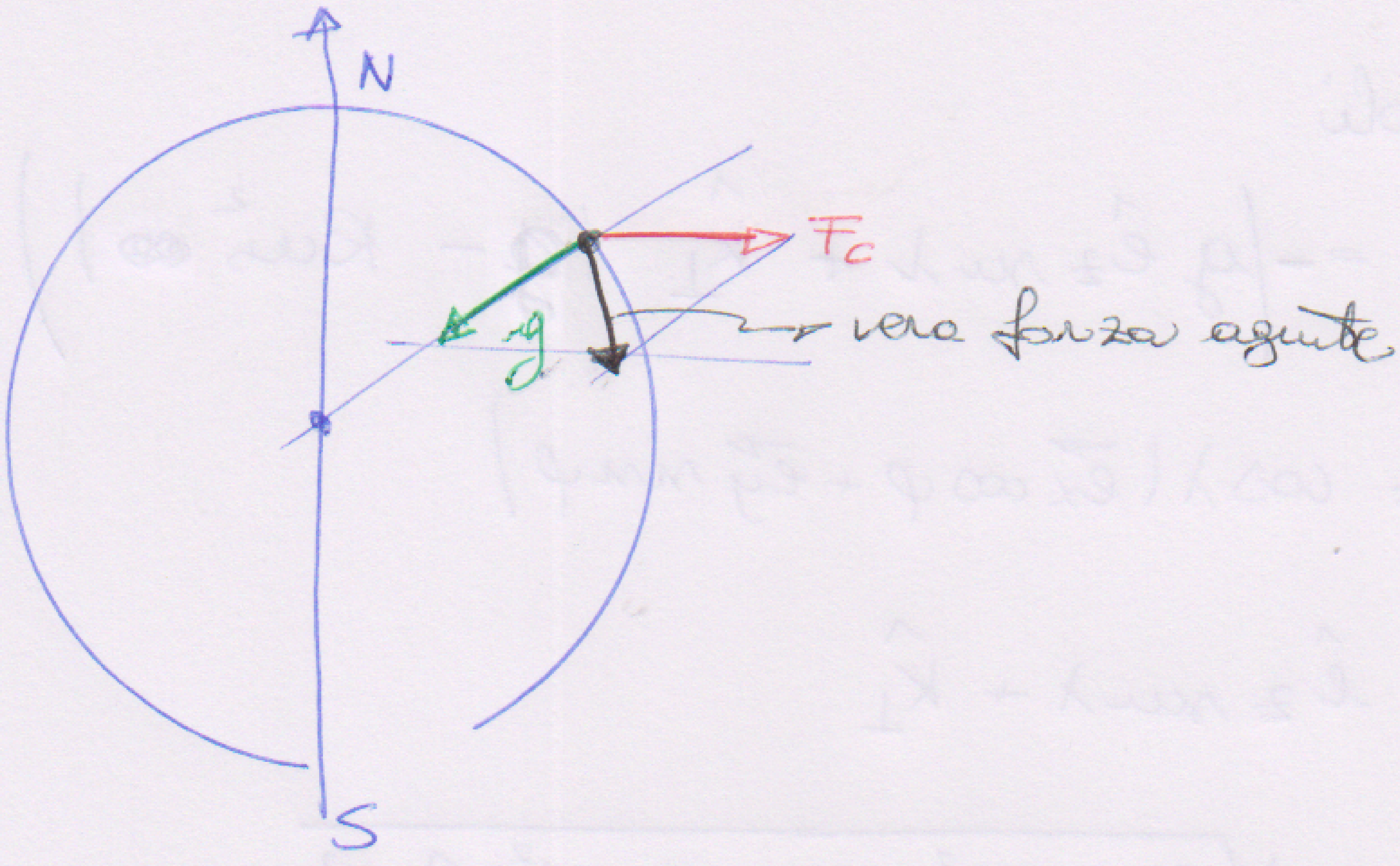
$$g\sqrt{1 + \frac{R\omega_0^2\cos^2\lambda}{g}\underbrace{\left(\frac{R\omega_0^2}{g} - 2\right)}_{<0}}$$

Calcoliamo $\frac{R\omega_0^2}{g}$ $\quad R = 6{,}3710 \cdot 10^6\ m$

$$\frac{6{,}4\ 10^6\ (7{,}3)^2\ 10^{-10}}{9{,}8} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \ll 2$$

La gravità diminuisce

Approssimando $\sqrt{1+x} \sim 1 - \frac{x}{2}$



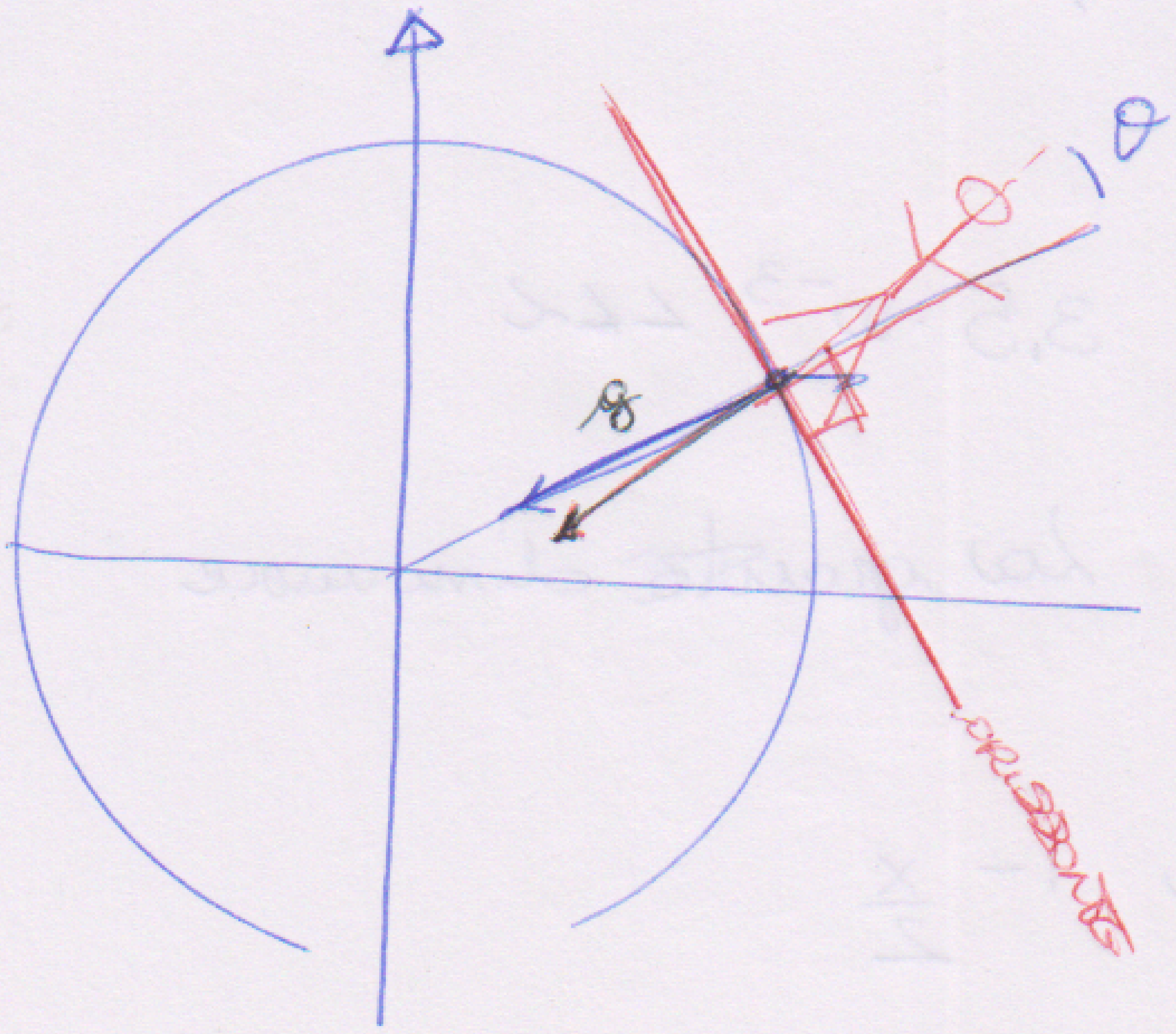
otteniamo

$$|g'| \simeq g\left(1+\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{R\omega^2}{g}-2}_{-2}\right)\frac{R\omega^2\cos^2\lambda}{g}\right)$$

$$\simeq g\left(1-\frac{R\omega^2\cos^2\lambda}{g}\right)$$

$$|g'| \simeq g - \underline{R\omega^2\cos^2\lambda}$$

diminuzione all'equatore dello 93%



Se una massa cadesse dalla sup. al centro della terra "mancherebbe" il centro