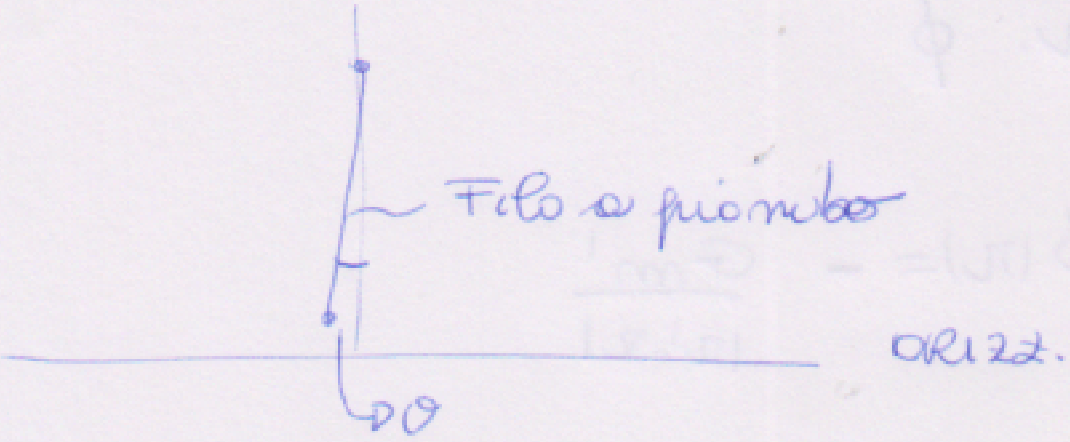
angolo di deviazione $\theta \simeq -\frac{\omega^2 R}{2g} \sin(2\lambda) \sim -0{,}1° \sin(2\lambda)$



Più che una sfera, un ellissoide

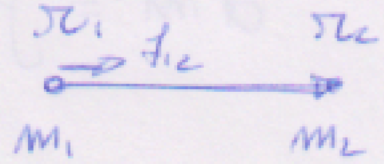
FITZPATRICK
AN INTRODUCTION TO
CELESTIAL MECHANICS

Calcoliamo meglio la forma della Terra

Facciamo una digressione sui campi gravitazionali Newtoniani

La forza gravitazionale che si genera in presenza di due masse puntiformi è data da

$$f_{12} = G m_1 m_2 \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3}$$



$\downarrow$

forza che agisce su massa m_1 dato da m_2

G: costante gravitazionale universale $= 6{,}7 \times 10^{-11}\ m^3 Kg^{-1} S^{-2}$

definendo $f_{12} = m_1 \vec{g}$

accelerazione grav. di m_1

ottengo $\vec{g} = G m' \frac{r' - r}{|r' - r|^3}$ massa in r attratta da massa in m'

Abbiamo già visto come $\vec{g}$ può essere ricavato da un energ. potenz. grav. ϕ

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi(r) \qquad \phi(r) = -\frac{Gm'}{|r'-r|}$$

Se considero una serie di masse puntiformi

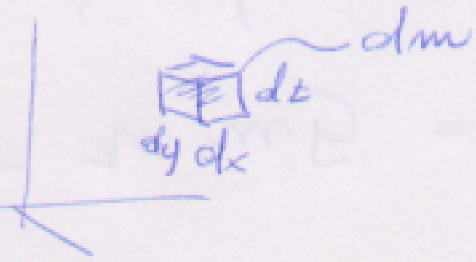
$$\phi(r) = \sum_i^N -\frac{Gm_i}{|r_i - r|}$$

accel. ricavata sempre $g = \nabla\phi$

Sovrapp. degli effetti

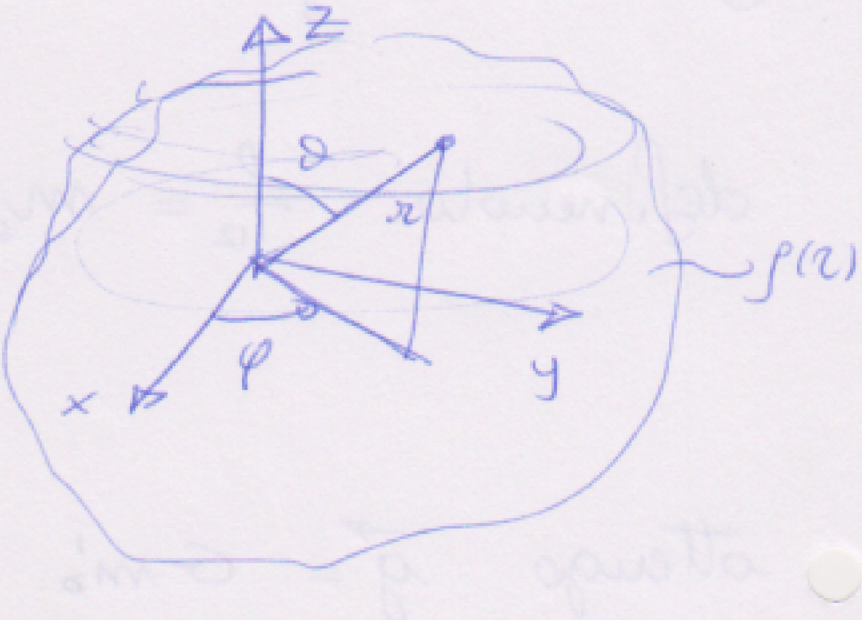
Nel limite continuo di una distr. di masse con densità $\rho(r')$ | avrò in un "volumetto" dV trovo una massa

$$dm' = \rho(r')\, dV(r')$$



$$\phi = -G\int_V \frac{dm(r)}{|r'-r|} = -G\int_V \frac{\rho(r')\,dV}{|r-r'|}$$

Passiamo in coord. sferiche e consideriamo ρ indipendente dall'angolo φ: simmetria assiale della distribuzione



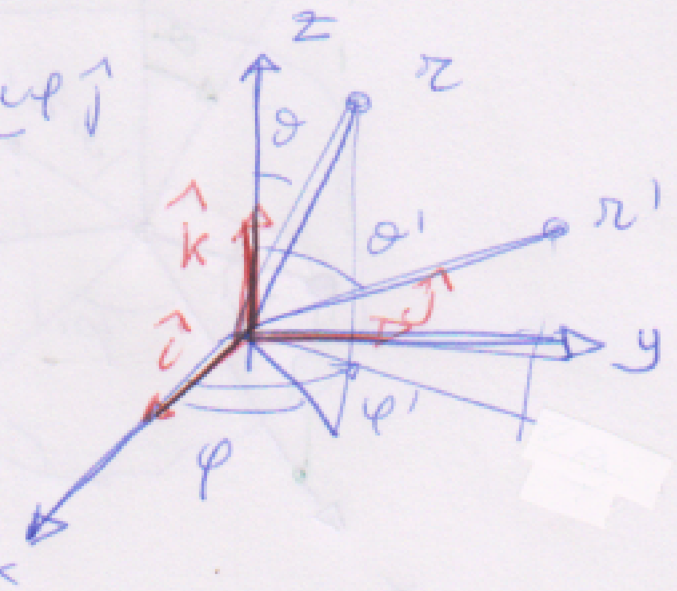
$$\begin{cases} x = r'\sin\theta\cos\varphi \\ y = r'\sin\theta\sin\varphi \\ z = r'\cos\theta \end{cases} \qquad dV = (r')^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$\phi = -G \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{(r')^2\rho(r,\theta')}{|r-r'|}\sin\theta'\, d\varphi'\, d\theta'\, dr'$$

$$= -G \int_0^\infty\int_0^\pi (r')^2\rho(r',\theta')\sin\theta'\, d\theta'\, dr' \int_0^{2\pi}\frac{1}{|r-r'|}\, d\varphi'$$

Calcoliamo $|r-r'| = \sqrt{|r|^2+|r'|^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}$

$$\vec{r} = \underset{\underset{|r|}{\parallel}}{d}\left(\underbrace{\sin\theta\cos\varphi}_{x_r}\,\hat{i} + \underbrace{\sin\theta\sin\varphi}_{y_r}\,\hat{j} + \underbrace{\cos\theta}_{z_r}\,\hat{k}\right)$$



analog. $\vec{r}' = d'(\sin\theta'\cos\varphi'\,\hat{i} + \sin\theta'\sin\varphi'\,\hat{j} + \cos\theta'\,\hat{k})$

poniamo

$\bar{r}\cdot\bar{r}' = dd'\cdot F$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{\sqrt{d^2+d'^2-2dd'F}} = \frac{1}{d\sqrt{1+\left(\frac{d'}{d}\right)^2-2\frac{d'}{d}F}}$$

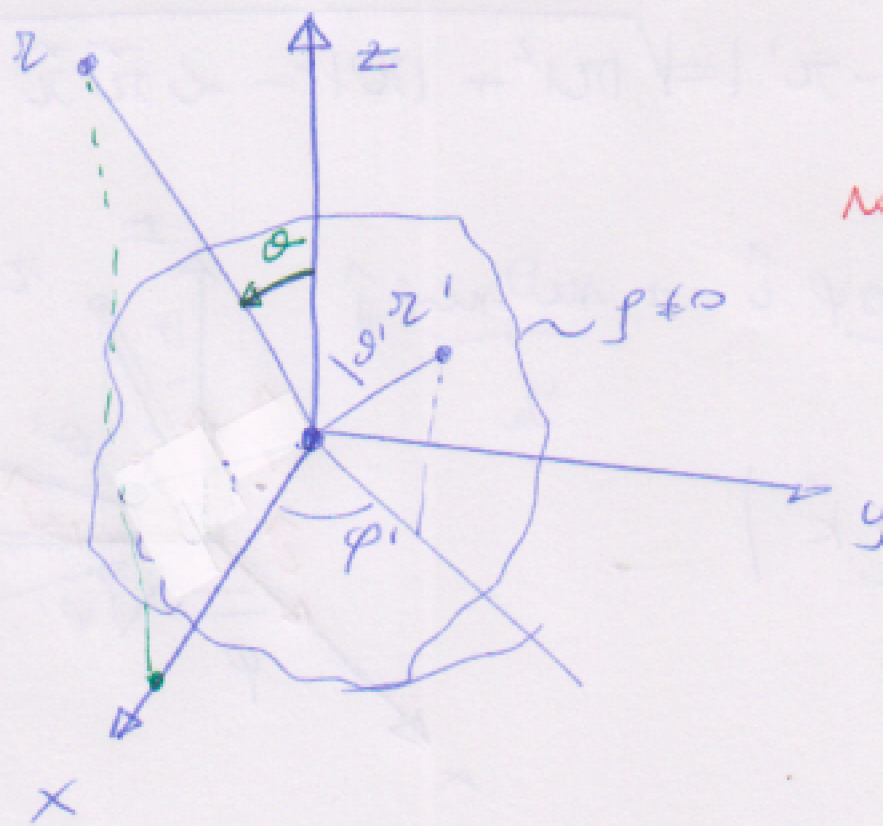
Supponiamo $d >> d'$, in questo caso possiamo sviluppare in serie di Taylor $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{d}\left[1 + \frac{d'}{d}F - \left(\frac{d'}{d}\right)^2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d'}{d}\right)^2(3F^2-1) + O\left(\left(\frac{d'}{d}\right)^3\right)\right]$$

Calcoliamo $\int_0^{2\pi} \frac{1}{|r-r'|}\,d\varphi = 2\pi \left\langle \frac{1}{|r-r'|} \right\rangle$

↳ media nell'angolo

Mi metto in un rif. in cui φ di $r = 0$



NOTA $|r'| \ll |r|$

In questo caso $F = \frac{r \cdot r'}{dd'} = \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi' + \cos\theta\cos\theta'$

Calcoliamo $\int_0^{2\pi} F\,d\varphi = 2\pi\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\underbrace{\int\cos\varphi'}_{=0}$

$= \langle F \rangle = \cos\theta\cos\theta'$

Alla stessa maniera $\langle F^2 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F^2\,d\varphi$

troviamo $<\cos^2\varphi> = \frac{1}{2}$

$$<F^2> = \cancel{\cos\theta \cos} \frac{1}{2}\sin^2\theta \sin^2\theta' + \cos^2\theta\cos^2\theta' =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)}_{\text{fattorizzo } \theta \text{ e } \theta'}$$

Otteniamo

$$<\frac{1}{|x-r'|}> = \frac{1}{d}\left[1 + \left(\frac{d'}{d}\right)\cos\theta\cos\theta' + \left(\frac{d'}{d}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) + o\left(\frac{d'}{d}\right)^3\right]$$

Procedendo nei calcoli, si può verificare che la sommatoria porta alla cosiddetta espansione in polinomi di Legendre

Polinomi di Legendre

$$P_n(x) \doteq \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4\cdot 2}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \dots = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-x)$$

Prop. fondam. dei polim Legendre: ortogonalità in $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = \frac{\delta_{nm}}{n+1/2}$$

Sono inoltre un set completo ovvero, ogni funzione regolare def. in $[-1,1]$ può essere rapp. come

$$f(x) = \sum_n P_n(x) \underbrace{f_n}_{\text{coeff. dello sv.}}$$

$$f_n = \int_{-1}^{1} P_n(x) f(x) \cdot (n+1/2) = \left(n+\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\, f(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta$$

Riscriviamo lo sviluppo come

$$< \frac{1}{|r-r'|} > = \frac{1}{d} \Big[\underbrace{P_0(\cos\theta) P_0(\cos\theta')}_{=1} + \left(\frac{d'}{d}\right)^{1} P_1(\cos\theta) P_1(\cos\theta') + \left(\frac{d'}{d}\right)^2 P_2(\cos\theta) P_2(\cos\theta') + O\left(\frac{d'}{d}\right)^3 \Big]$$

in generale vale

$$|r| > |r'| \Rightarrow < \frac{1}{|r-r'|} > = \frac{1}{|r|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|r'|}{|r|}\right)^n P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta')$$

analog.

$$|r| < |r'| \Rightarrow < \frac{1}{(r-r')} > = \frac{1}{|r'|} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|r|}{|r'|} P_n(\cos\theta) P_n \cos(\theta') \right]$$

Tornando all'espressione del potenziale gravitazionale

$$\phi = -G \int_0^\infty \int_0^\pi r' \rho(r',\theta)\, \sin\theta \, d\theta \, dr' \; 2\pi < \frac{1}{|r-r'|} >$$

$$= -2\pi G \sum_n P_n(\cos\theta) \cdot \Big\{ \frac{1}{|r|^{n+1}} \int_0^{|r|} \int_0^{\pi} (r')^{n+2} \rho(r',\theta') \sin(\theta') P_n(\cos\theta')\, dr' d\theta' + |r|^n \int_{|r|}^{\infty} \int_0^{\pi} (r')^{1-n} \rho(r',\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta' \, d\theta' dr' \Big\}$$

Possiamo sfruttare l'ortog. delle f. di Lagrange sviluppando anche la funzione $\rho(r,\theta)$ (come detto prima per la completezza delle f. di Lag. posso sviluppare in serie una f. generica)

$$\rho(r,\theta') = \sum \rho_m(r) P_m(\cos\theta')$$

$$\text{dove } \rho_m(r) = (m+1/2) \int_0^\pi \rho(r,\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

Inserisco nell'esp. per ϕ. Considero il primo termine

$$-\frac{2\pi G}{|r|^{n+1}} \sum_n \sum_m^{P_n(\cos\theta)} \int_0^{|r|} (r')^{n+2} \rho_m(r) \underbrace{\int_0^\pi P_m(\cos\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta'}_{\delta_{nm}/n+1/2}$$

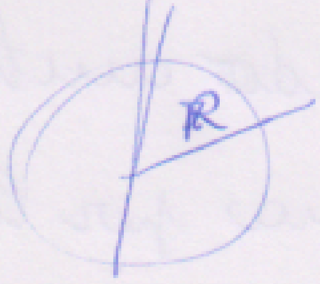
$$= -\frac{G\,2\pi}{|r|^{n+1}}\sum_n \frac{1}{(n+1/2)} \oint P_n(\cos\theta) \int_0^{|r|} (r')^{n+2} f_n(r')\,dr'$$

analog. per l'altro termine e troviamo

$$\phi = -2\pi G \sum_n \frac{P_n(\cos\theta)}{n+1/2}\left(\frac{1}{|r|^{n+1}}\int_0^{|r|} r'^{(n+2)} f_n(r')\,dr' + |r|^n \int_{|r|}^{\infty} r'^{(1-n)} f_n(r')\,dr' \right)$$

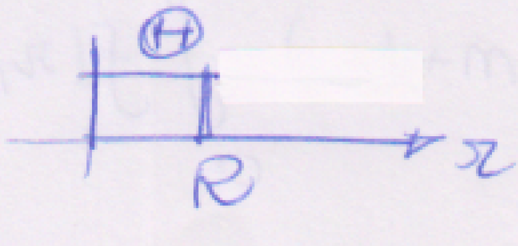
Potenziale grav. di una sfera uniforme

$$f(r,\theta) = \begin{cases} \gamma & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



f non ha dip. da θ quindi $f = \underset{\overset{\parallel}{1}}{P_0(\cos\theta)} \cdot \Theta(R-r)\,\gamma$

Θ funzione Heaviside $\Theta(R-r) = \begin{cases} 1 \text{ se } r \le R \\ 0 \text{ se } r > R \end{cases}$



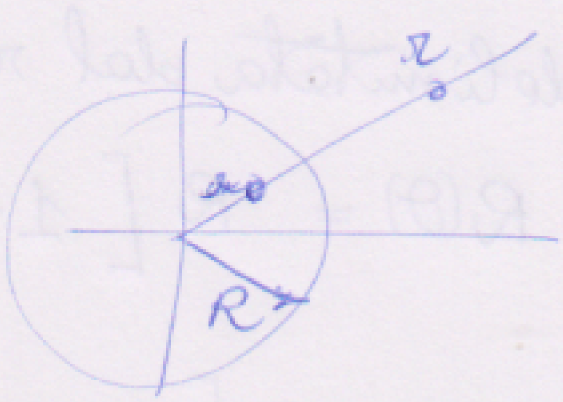
Quindi $f_n(r) = \begin{cases} \gamma\,\Theta(R-r) & n=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Potenziale gravit.

$$\phi = -2\pi G \cdot 2\gamma \left(\frac{1}{|r|} \int_0^{|r|} (r')^2 \, \Theta(R-r') \, dr' + \int_{|r|}^{R} r' \, \Theta(R-r') \, dr' \right)$$

NOTA

se $|r| \geq R$ il secondo termine scompare



$$\phi(r) = -\frac{4\pi G \gamma}{|r|} \int_0^R (r')^2 \, dr'$$

$$= -\frac{4\pi}{3} R^3 \frac{G\gamma}{|r|} = -\frac{M G}{|r|}$$

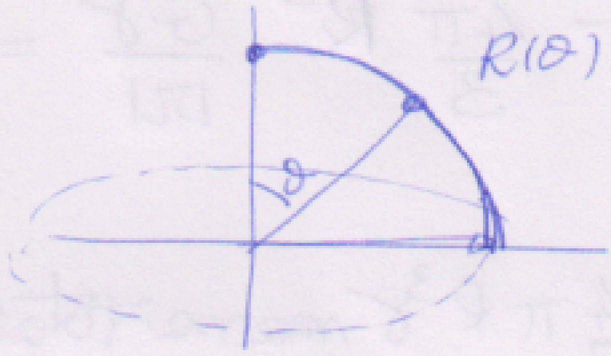
$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \gamma$ massa totale della sfera

Il pot. grav. esterno ad una sfera coincide col pot. grav. prodotto da una massa puntiforme collocata al centro della sfera stessa (per questo possiamo trattare pianeti come punti senza commettere errori)

Consideriamo adesso l'effetto del primo ordine nello sviluppo Legendre della densità di massa, ovvero una distribuzione di massa a densità costante delimitata dal raggio

$$R(\theta) = R\left[1-\frac{2}{3}\varepsilon P_2(\cos\theta)\right] =$$

$$= R\left[1-\varepsilon\left[\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right]\right]$$



per $\theta = 0$ $\quad R(\theta) = R\left[1-\frac{2}{3}\varepsilon\right] < R$

$$R(\pi/2) = R\left[1+\frac{\varepsilon}{3}\right] > R$$

Sfera allungata a equatore e accorciata ai poli di un fattore ε: ellitticità.

Si verifica che la figura ottenuta è un ellissoide di rotazione

Calcoliamo il potenziale grav. esterno ad un ellissoide con $\varepsilon << 1$ $\qquad (|r| > R(\pi/2))$

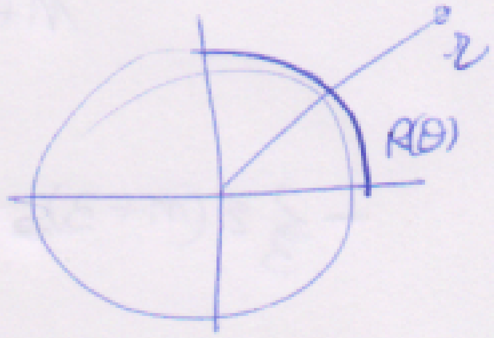
$$\phi = -2\pi G \sum_n P_n(\cos\theta) \left\{ \frac{1}{|r|^{n+1}} \int_0^{|r|} \int_0^{\pi} (r')^{n+2} \rho(r',\theta') \sin(\theta') P_n(\cos\theta') dr' d\theta' + \right.$$

$$\left. + |r|^n \int_{|r|}^{\infty} \int_0^{\pi} (r')^{1-n} \rho(r',\theta') P_n(\cos(\theta')) \sin\theta' d\theta' dr' \right\}$$

$$\rho(r',\theta') = \Theta(R(\theta) - r')\, \gamma \qquad \gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$ densità della sfera

$$R(\theta) = R\left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon P_2(\cos\theta)\right]$$

R: Fissato (raggio medio)



Il secondo integrale è nullo $|r'| > |r| \Rightarrow \Theta(R(\theta) - r') = 0$

$$\phi = -2\pi G \sum_n P_n(\cos\theta)\gamma \underbrace{\left\{ \frac{1}{|r|^{n+1}} \int_0^{\pi} \int_0^{R(\theta)} r'^{n+2} \sin\theta' P_n(\cos\theta') dr' d\theta' \right\}}$$

$$\frac{1}{|r|^{n+1}} \int_0^{\pi} \sin\theta' P_n(\cos\theta') d\theta' \int_0^{R(\theta')} r'^{n+2} dr'$$

$$\int_0^{R(\theta)} r'^{\,n+2}\, dr' = \frac{R(\theta)^{n+3}}{n+3} =$$

$$= \frac{R^{n+3}}{n+3}\left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon\, P_2(\cos\theta')\right]^{n+3} \overset{\varepsilon \ll 1}{\simeq}$$

$$\simeq \frac{R^{n+3}}{n+3}\left[1 - (n+3)\frac{2}{3}\varepsilon\, P_2(\cos\theta')\right]$$

$$\phi = -2\pi G\gamma \sum_n P_n(\cos\theta) \frac{1}{|r|^{n+1}} \int_0^{\pi} \sin\theta'\, P_n(\cos\theta') \cdot$$

$$\cdot \frac{R^{n+3}}{n+3}\left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon(n+3)\, P_2(\cos\theta')\right] d\theta'$$

$$= -2\pi G\gamma \sum_n \frac{P_n(\cos\theta)}{n+3}\left(\frac{R}{|r|}\right)^n \frac{R^3}{|r|}\left[\int_0^{\pi} \sin\theta' P_n(\cos\theta')\, d\theta\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\varepsilon(n+3) \int_0^{\pi} P_2(\cos\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta\right]$$

Usando le relaz. di ortogonalità

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) \underset{1}{\underbrace{P_0(\cos\theta)}} \sin\theta = \delta_{n0} \cdot 2$$

$$\int_0^{\pi} P_2(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = \frac{\delta_{n,2}}{2+1/2} = \delta_{n,2}\,\frac{2}{5}$$

Otteniamo

$$\phi = -2\pi G\gamma\left[\frac{1}{3}\frac{R^3}{|r|}\,2 + \frac{P_2(\cos\theta)}{5}\left(\frac{R}{|r|}\right)^2\frac{R^3}{|r|}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{2}{3}\varepsilon\,\cancel{(n+3)}\cdot\frac{2}{\cancel{5}}\right)\right]$$

$$= -\cancel{2\pi}\, G\,\frac{M\,\cancel{3}}{4\cancel{\pi}\,\cancel{R^3}}\left[\frac{2}{\cancel{3}}\frac{\cancel{R^3}}{|r|} - \varepsilon P_2(\cos\theta)\frac{R^{\cancel{5}\,2}}{|r|^3}\frac{4}{\cancel{3}\cdot 25}\right]$$

$$= -\frac{GM}{|r|} + \varepsilon MG\frac{2}{5}P_2(\cos\theta)\frac{R^2}{|r|^3}$$

Il potenziale sulla superf. dell'ellisse di rotazione

$|r| = R(\theta)$

$$\phi(R(\theta),\theta) = -\frac{MG}{R(\theta)} + \varepsilon\frac{2}{5}P_2(\cos\theta)\frac{R^2}{R^3(\theta)}MG$$

Ponendo $R(\theta) \simeq R$ (le variaz. di raggio siano trascurabili)

$$\phi(R,\theta) = -\frac{GM}{R}\left[1 - \frac{2}{5}\varepsilon P_2(\cos\theta)\right]\left[1 + \frac{2}{3}\varepsilon P_2(\cos\theta)\right]$$

$$\frac{R^2}{R^3(\theta)} \simeq \frac{R^2}{R^3} + \varepsilon \qquad \frac{1}{R(\theta)} \simeq \frac{1}{R\left[1-\frac{2}{3}\varepsilon P_2(\cos\theta)\right]} \simeq \frac{1}{R}\left[1 + \frac{2}{3}\varepsilon P_2(\cos\theta)\right]$$

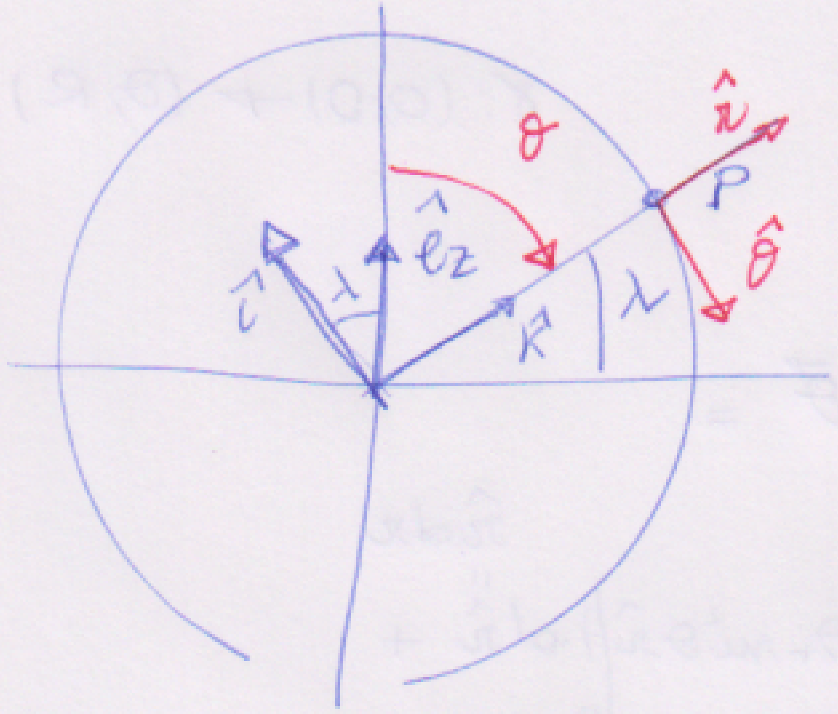
$$\boxed{\phi = -\frac{MG}{R}\left[1 + \varepsilon\frac{4}{15}P_2(\cos\theta)\right]}$$

Potenziale della forza centrifuga terrestre

Riprendiamo l'accelerazione centrifuga

$\vec{a}_C = -R\ \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{k})$

calcoliamo rispetto al sist. di rif. rotante



Prendo un pt. P e scelgo $\hat{i}$ nel piano $(\vec{e}_z, \hat{k})$

$\hat{e}_z = \hat{i}\cos\lambda + k\sin\lambda$

$\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_z = \omega\,(\hat{i}\cos\lambda + \hat{k}\sin\lambda)$

$\omega \wedge \hat{k} = \omega\,(\hat{i}\cos\lambda + \hat{k}\sin\lambda) \wedge \hat{k} = \omega\,(-)\cos\lambda\,\hat{j}$

$\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \hat{k}) = \omega^2\,(\hat{i}\cos\lambda + \hat{k}\sin\lambda) \wedge (-\cos\lambda\,\hat{j}) =$

$\omega^2\,[-\hat{k}\cos^2\lambda + \sin\lambda\cos\lambda\,\hat{i}]$

$\vec{a}_C = -R\omega^2\,(\hat{i}\sin\lambda\cos\lambda - \cos^2\lambda\,\hat{k})$

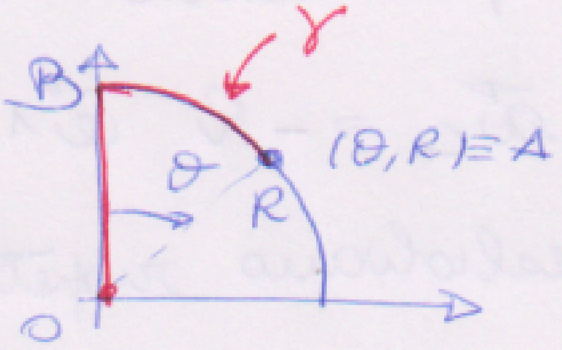
Cerco il potenziale associato ad $\vec{a}_c$. Conviene utilizzare le coordinate sferiche standard con angolo ϑ

così $\lambda = \frac{\pi}{2} - \vartheta \Rightarrow \cos\lambda = \sin\vartheta$; $\sin\lambda = \cos\vartheta$

$\hat{k} \equiv \hat{e}_r \quad \hat{i} = -\hat{\vartheta}$

$$\vec{a}_c = R\omega^2 \left(\hat{\theta} \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta\, \hat{e}_r\right)$$

Troviamo il potenz. ~~grad.~~ cent. corr.



$$\vec{a}_c = -\nabla \chi$$

$$\chi_0(R,\theta) = -\int_{\gamma: O\to A} \vec{a}_c\, d\vec{\ell}$$

$\gamma: (0,0) \to (\theta, R)$

$$= -\int_O^B \vec{a}_c\, d\vec{r} - \int_B^A \vec{a}_c \cdot d\vec{\theta} =$$

$$= -\cancel{R}\omega^2 \left(\int_0^R r \underbrace{\left(\hat\theta \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta\,\hat r\right)\Big|_{\theta=0} \cdot \overset{\hat r dr}{\overset{\parallel}{d\vec{r}}}}_{=0} + \int_0^\theta R\left(\hat\theta\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\right)\hat r\, \underset{R\hat\theta d\theta}{\underset{\parallel}{d\hat\theta}} \right)$$

$$= -\omega^2 R^2 \int_0^\theta \sin\theta\cos\theta\, d\theta = -\omega^2 R^2 \frac{\sin^2\theta}{2}$$

Possiamo semplicemente prendere χ e verificare $\vec{a}_c = -\nabla\chi$ con la formula del gradiente in coord. polari

$$\vec\nabla = \hat e_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$-\nabla\chi = -\hat e_r\left(-\omega R\sin^2\theta\right) - \hat\theta\,\frac{1}{R}\left(-R^2\omega^2 \cancel{2}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$= \vec{a}_c(R,\theta)$$

Abbiamo trovato $\chi(r) = -\dfrac{\omega_0^2 |r|^2 \sin^2\theta}{2}$

Ricordiamo la def. di polinomio ~~Lagrange~~ Legendre

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}\sin^2\theta = (1-\cos^2\theta)\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{2} + 1 = 1 - P_2(\cos\theta)$$

$$\chi = \frac{\omega_0^2 |r|^2}{3}\left[P_2(\cos\theta) - 1\right] = \frac{MG}{R}\left(\frac{|r|}{R}\right)^2 \xi \left[P_2(\cos\theta) - 1\right]$$

dove $\xi = \dfrac{\omega_0^2}{3}\dfrac{R^3}{MG}$ $\qquad \chi(R,\theta) = \dfrac{MG}{R}\,\xi\left[P_2(\cos\theta) - 1\right]$

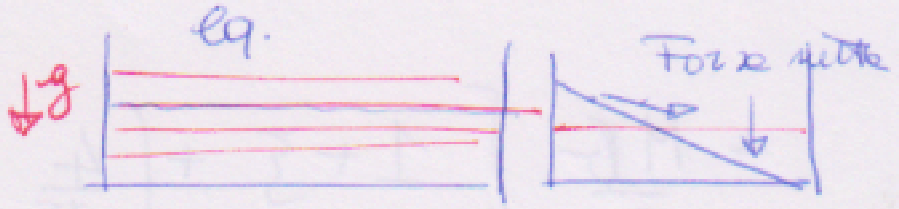
Riprendiamo l'espressione del pot. gravitazionale

$$\phi^{(R,\theta)} = -\frac{MG}{R}\left[1 + \varepsilon\frac{4}{15}P_2(\cos\theta)\right]$$

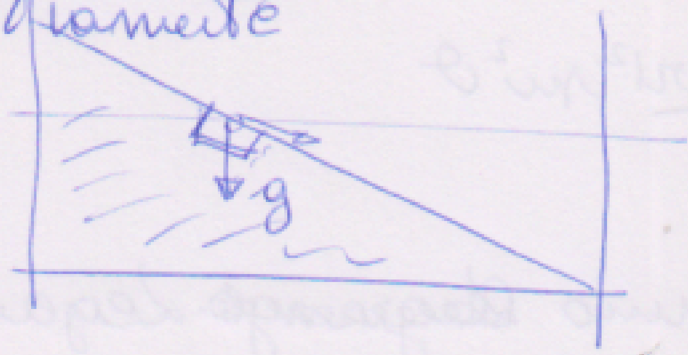
Potenziale totale sulla superficie dell'ellissoide di rotazione

$$\boxed{\phi + \chi = -\frac{MG}{R}\left[1 + \xi + \left(\frac{4\varepsilon}{15} - \xi\right)P_2(\cos\theta)\right]}$$

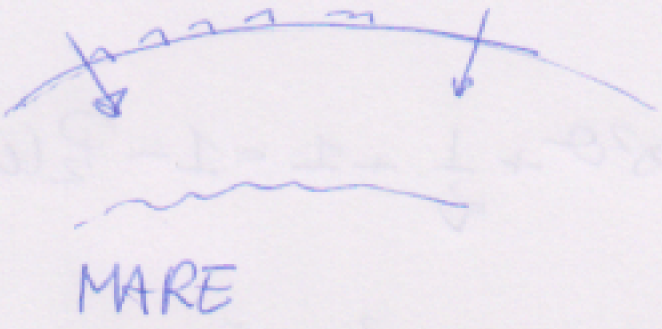
Digressione: Un fluido sottoposto ad un campo di forze, all'equilibrio dispone la superficie libera lungo le superfici di campo costante (un fluido non può reagire a forze di taglio



Intuitivamente



sulla sup libera una molecola di fluido si comporta come una massa che si muove lungo la sup. libera del fluido



Trattiamo in prima approx la Terra come un sistema fluido incomprimibile (sfera di acqua).

Quale sarà la sua configurazione?

Lungo la superficie libera, il potenziale totale delle forze gravitazionali e centrifughe deve essere costante.

Il fluido si deformerà finché non riuscirà ad adagiare la sua superf. esterna su di una superf. equipotenziale: NOTA: già dalla derivazione fatta appare chiaro che il potenziale sentito dal fluido dipende esso stesso dalla forma del fluido (prob. non lineare)

La sup esterna però è caratt. dall'eq.

$$(\chi + \phi)(R, \theta) = \text{cost}$$

$$-\frac{MG}{R}\left[1 + \xi + \left(\frac{4}{15}\varepsilon - \xi\right) \cdot P_2(\cos\theta)\right] = \text{cost}$$

otteniamo $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ellitticità}}}{\varepsilon} = \frac{15}{4}\xi$

Riscriviamo l'espressione utilizzata per parametrizzare la superf. $R(\theta) = R\left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon P_2(\cos\theta)\right] = R\left[1 - \varepsilon\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\right]$

$\hookrightarrow P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - 1$

Polo $R_p(0) = R\left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right] \doteq R_P$

Equ. $R_E(\pi/2) = R\left[1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right] \doteq R_E$

$$\underbrace{\frac{R_E - R_P}{R} = \varepsilon}$$

ellit. è la variaz % dei raggi equat e polare

$$\frac{R_E - R_P}{R} = \frac{15}{4}\xi = \frac{5}{4}\frac{\omega_0^2 R^3}{GM}$$

$$R_E - R_P = \frac{5}{4}\frac{\omega_0^2 R^4}{GM}$$

Calcoliamo utilizzando i parametri

$R = 6{,}4\ 10^6\ m$ $\omega_0 = 7{,}3\ 10^{-5}\ rad/s$ $M = 5.9\ 10^{24}\ kg$

$$R_E - R_P = \frac{5}{4}\frac{(7{,}3)^2 10^{-10} (6{,}4)^4 10^{24}}{5.9\ 10^{24}\ 6.7\ 10^{-11}} \simeq 27{,}5\ Km$$

Valore misurato $21{,}4$ Km, $\underbrace{\varepsilon = 3{,}4\ 10^{-4} \ll 1}_{\text{di fatto una sfera}}$