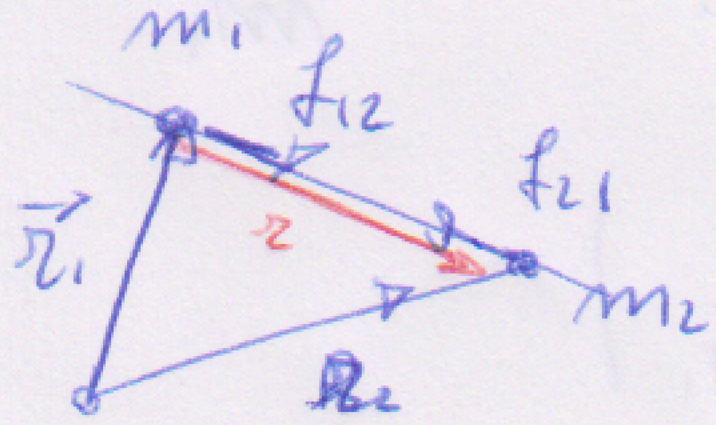
Iniziamo con un problema semplice di interazione gravitazionale di 2 corpi puntiformi



$$f_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|r|^3}\vec{r} = -f_{21}$$

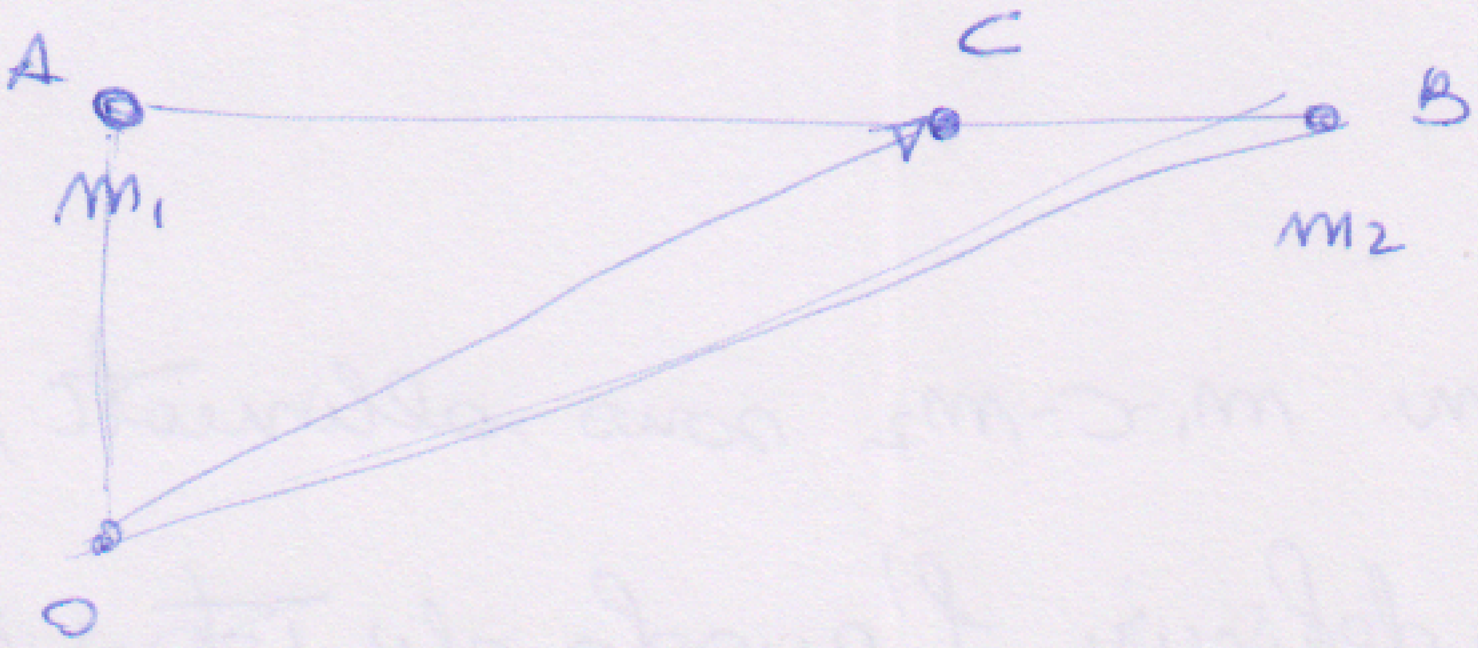
definendo $\vec{r} = r_2 - r_1$

$$m_1 \ddot{r}_1 = f_{12}$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = f_{21} = -f_{12}$$

$$m_1 \ddot{r}_1 + m_2 \ddot{r}_2 = 0 \rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = c$$

Scriviamo le equazioni rispetto a un sistema di rif. centrato nel centro di massa del sistema



$$(C-O) = \frac{(A-O)m_1 + (B-O)m_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = c'$$

$$\frac{d^2}{dt^2}r = \frac{d^2}{dt^2}(r_2 - r_1) = \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 =$$

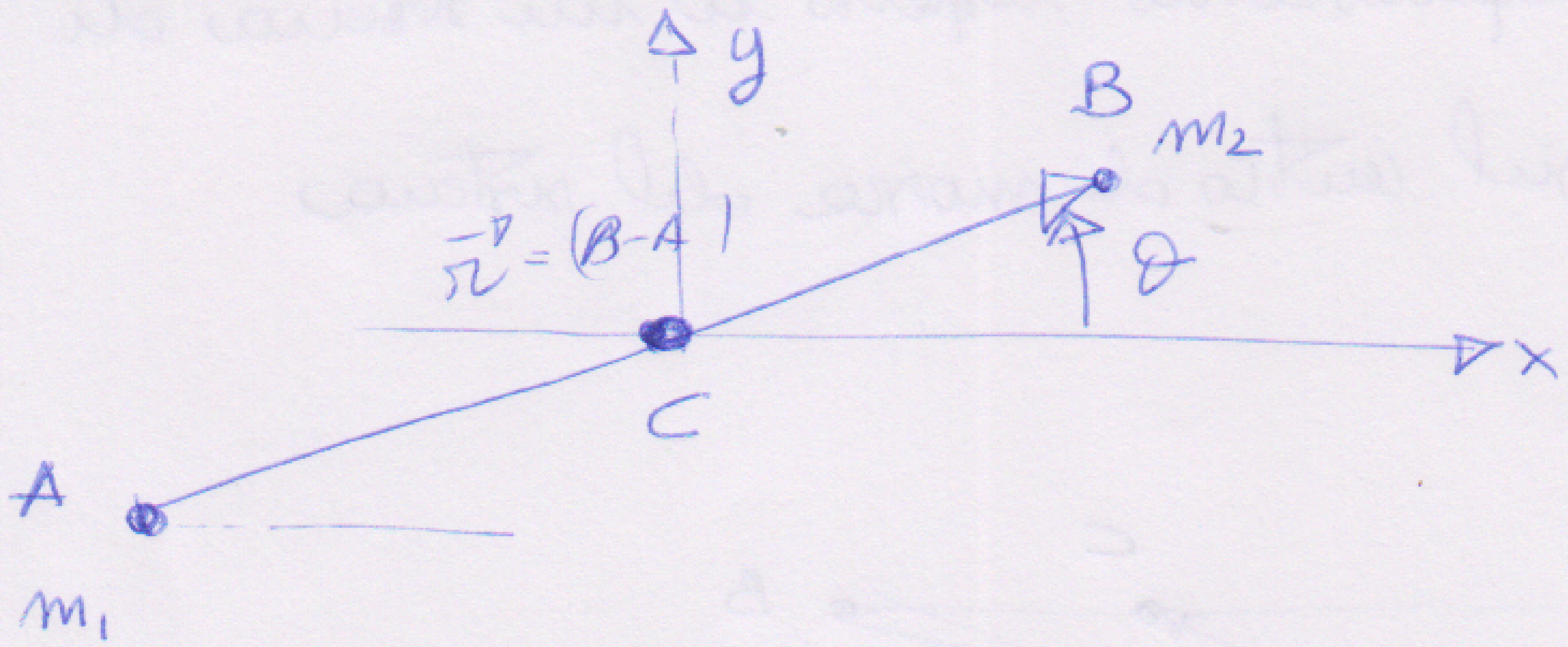
$$= -G\frac{m_1 m_2 \vec{r}}{|r|^3}\frac{1}{m_2} - G\frac{m_1 m_2}{|r|^3} r \frac{1}{m_1}$$

$$= -G\frac{m_1 m_2}{|r|^3}\vec{r}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)$$

$$= -G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}}{|r|^3} = -GM\frac{\vec{r}}{|r|^3}$$

$$M = m_1 + m_2$$

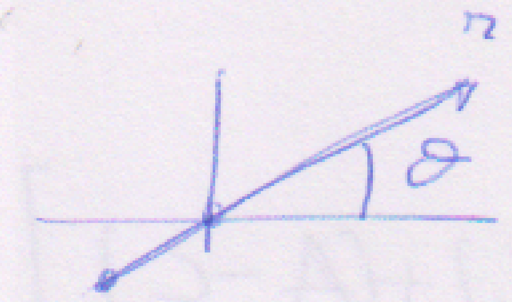
Per semplicità consideriamo che il c.d.m del sistema non si muova $v_C = 0$



Per def. di c.d.m. m_1-C-m_2 sono allineati, C è fisso, posso definire l'angolo di rotazione θ di A-B rispetto ad un sist di rif. fisso con origine in C

Ci siamo ricondotti al prob. di una singola massa che sperimenta un campo di forze centrale

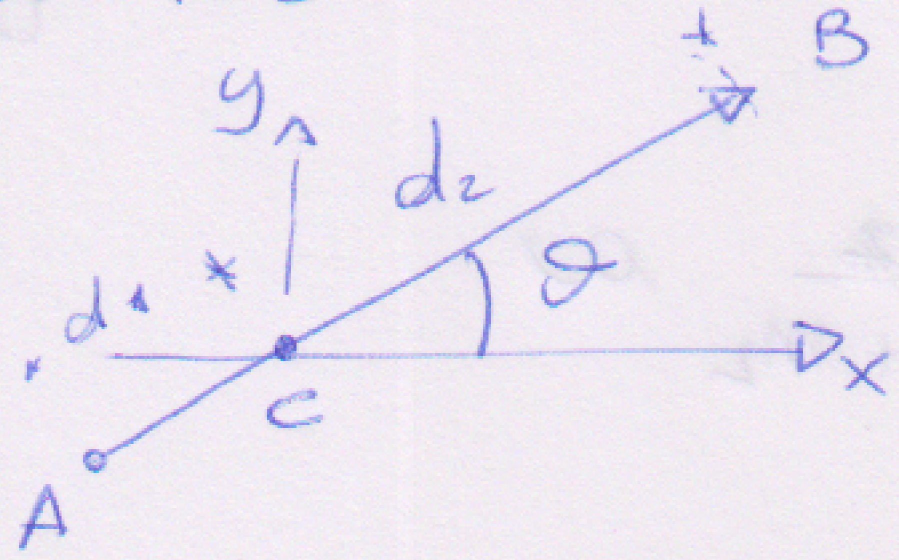
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM\frac{\vec{r}}{|r|^3}$$



Abbiamo visto che in generale $\vec{r}$ può seguire 3 possibili traiettorie: Ellittica, parab., iperb.

Siamo interessati ad un caso semplificato in cui m_1 e m_2 mantengano fra loro una distanza costante e ruotano attorno a C (come avviene nella coppia Terra-Luna)

⇒ Soluzione $|r|$ = costante ⇒ r segue una traiettoria CIRCOLARE



$\vec{r} = B - A$

$$(B-C) = d_2\,(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$$

$$(A-C) = -d_1\,(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2}(B-A) = \frac{d^2}{dt}(B-C) + \frac{d^2}{dt}(A-C)$$

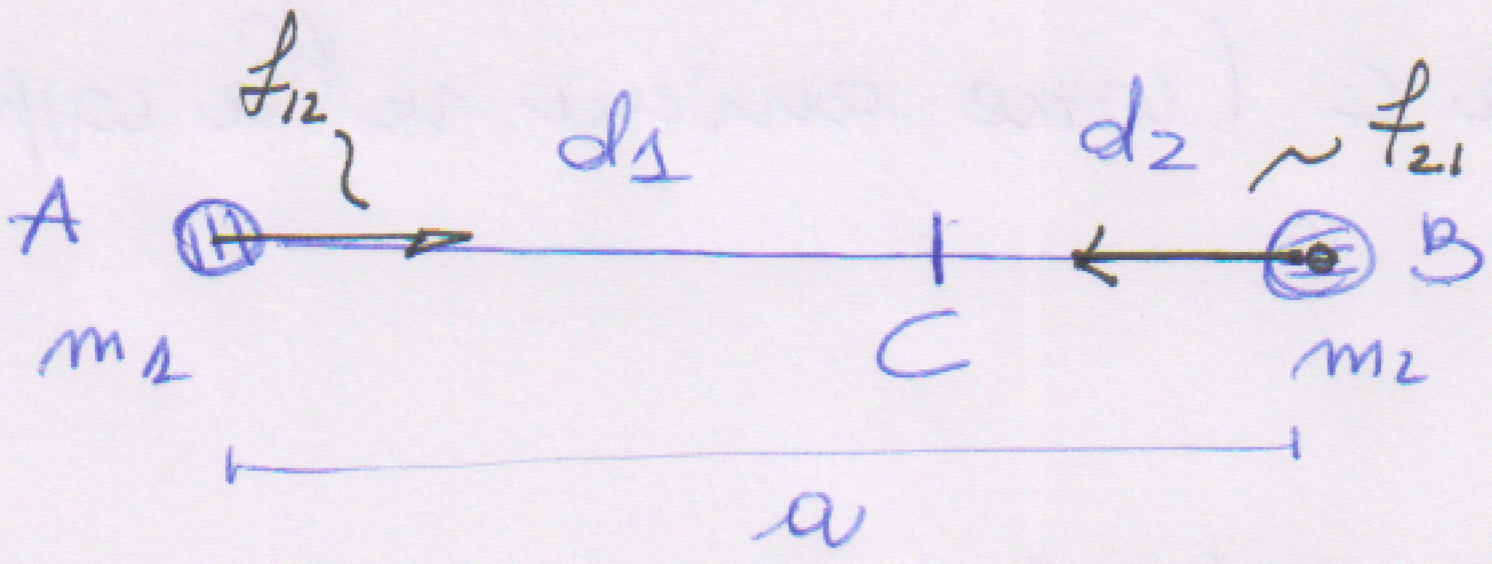
$$\frac{d^2}{dt^2}(B-C) = -\dot{\theta}^2 d_2 \left(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\right) = -\dot{\theta}^2 (B-C)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(A-C) = -\dot{\theta}^2 (A-C)$$

$$\frac{d}{dt^2}\vec{r} = -\dot{\theta}^2\left[(B-C)+(A-C)\right] = -\dot{\theta}^2\vec{r}$$

$$-\dot{\theta}^2\vec{r} = -\frac{MG}{|r|^3}\vec{r} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{MG}{|r|^3} = \text{costante}$$

Ci siamo riportati alla situazione



$\Rightarrow$ sistema rigido che ruota con velocità angolare costante $\omega^2 = \frac{MG}{|r|^3}$

abbiamo $d_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,a$

$d_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,a$

possiamo verificare $\omega^2 = \frac{MG}{a^3}$ imponendo l'equilibrio delle masse rispetto a un sist. di rif. solidale

$m_1 \Rightarrow |f_{12}| = |f_c|$

↳ forza centrifuga

$$|f_{12}| = G \frac{m_2}{a^3} |\vec{r}|$$

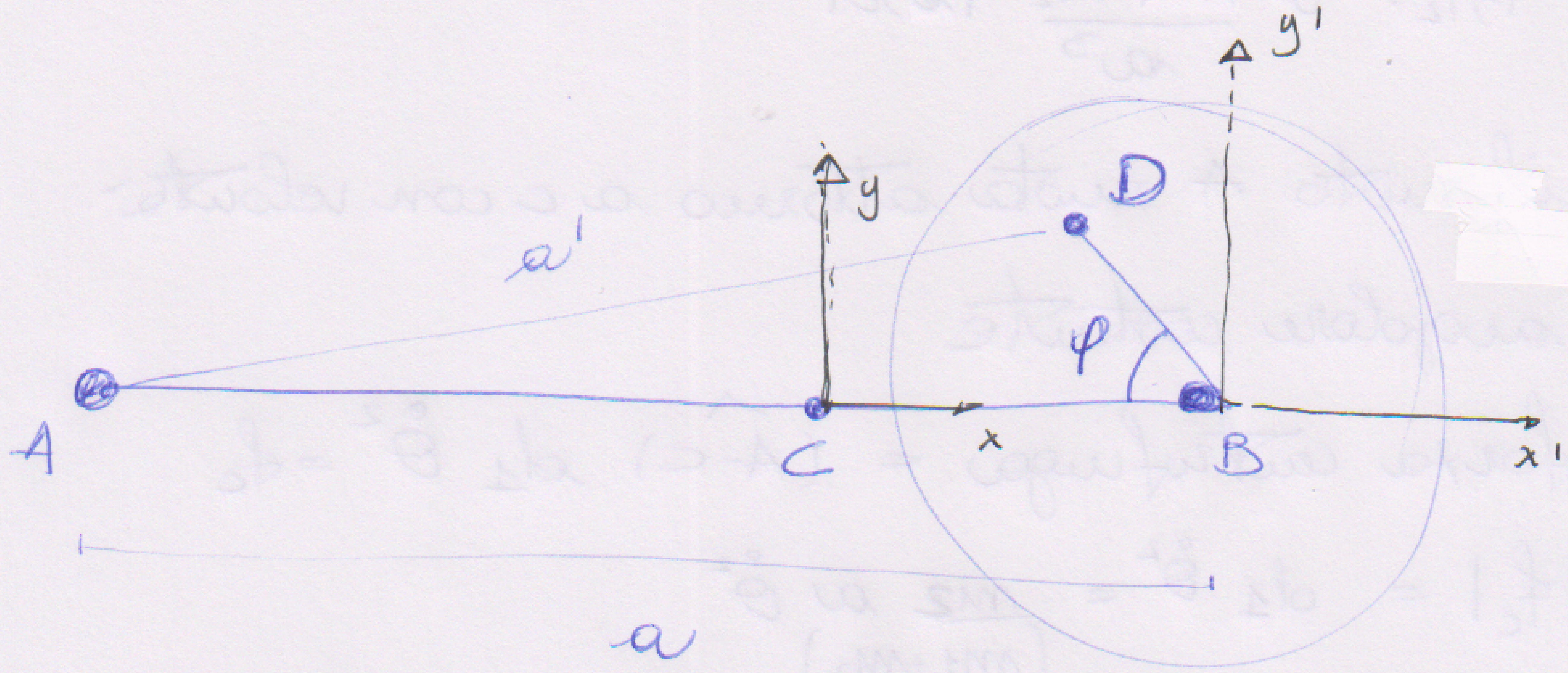
il punto A ruota attorno a c con velocità angolare costante

forza centrifuga $= (\widehat{A-C})\, d_1 \dot{\theta}^2 = f_c$

$$|f_c| = d_1 \dot{\theta}^2 = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} a \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \frac{m_2 \dot{\theta}^2}{(m_1+m_2)} a = \frac{G a}{a^3} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \overset{M}{\overset{\shortparallel}{(m_1+m_2)}} \frac{G}{a^3}$$

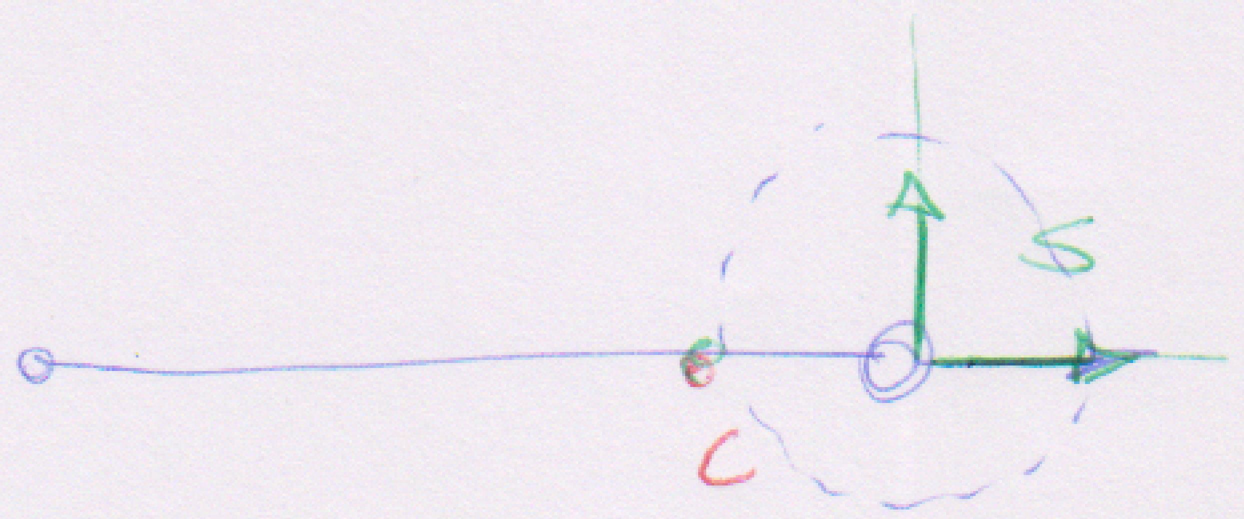
Complichiamo la situazione considerando B come un corpo esteso

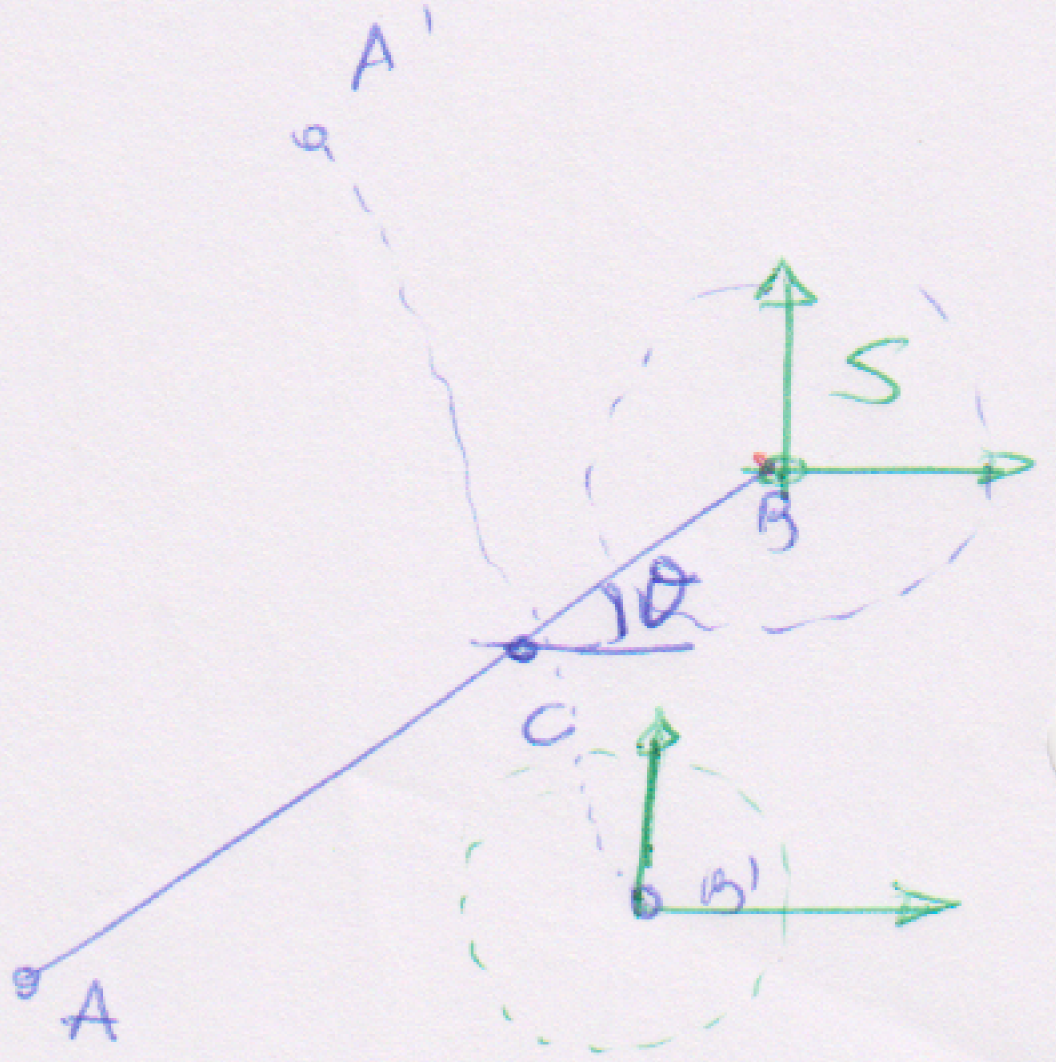


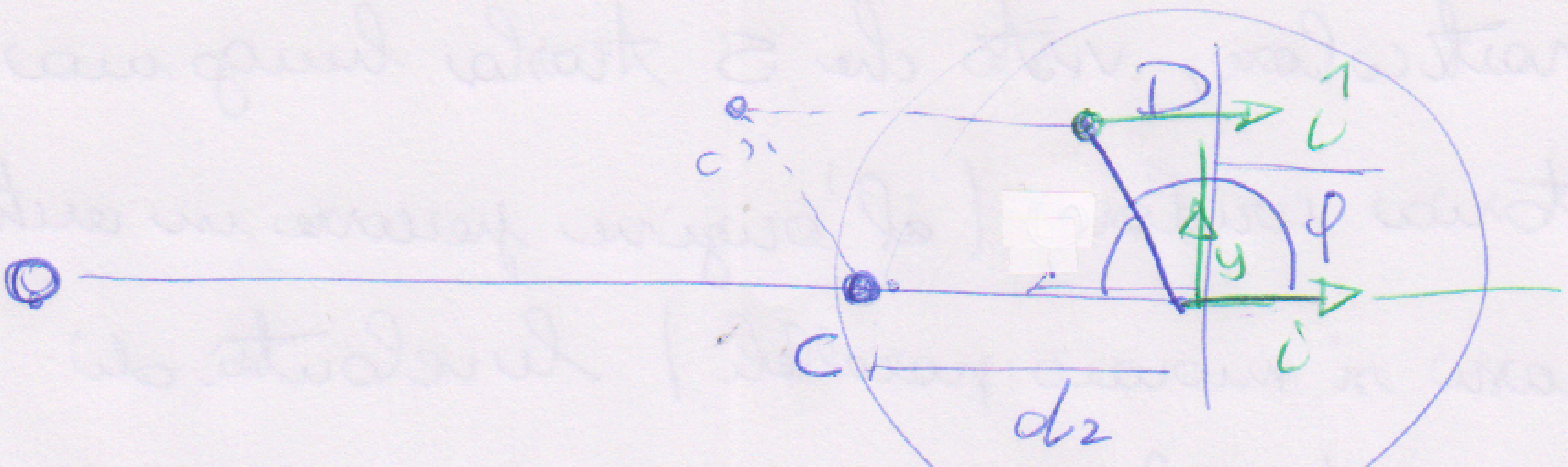
- L'asse AB ruota con velocità angolare $\omega_0=\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$

- Hp: Per semplicità consideriamo che il corpo B <u>non</u> ruoti attorno al proprio c.d.m in B

La nostra Hp implica che l'asse x' di un sistema solidale al corpo B, si muova mantenendosi parallelo a sé stesso, senza ruotare







Fissiamo un istante t e scegliamo gli assi di riferimento

$$a_C = \frac{f_C}{m} = \hat{i}\ \dot{\theta}^2 d_2$$

Pt. generico D $\quad \vec{f}_C = m_D\, \hat{i}\, \omega_0^2 d_2$

Quando ho un campo di forza costante che agisce su punti del corpo (analogo alla forza peso)

~~Posso porre~~ Ricavo il potenz. centrifugo

$$\chi = -m\ \omega_0^2 d_2\ x$$

↓ massa del generico pt.

↳ coord. locale in S che individua un punto sul corpo

$$\nabla \chi = -m\ \omega_0^2 d_2\ \underbrace{\nabla_x x}_{\hat{i}} = \vec{f}_C$$

$$\hat{i} = (\hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y + \hat{k}\partial_z)x$$

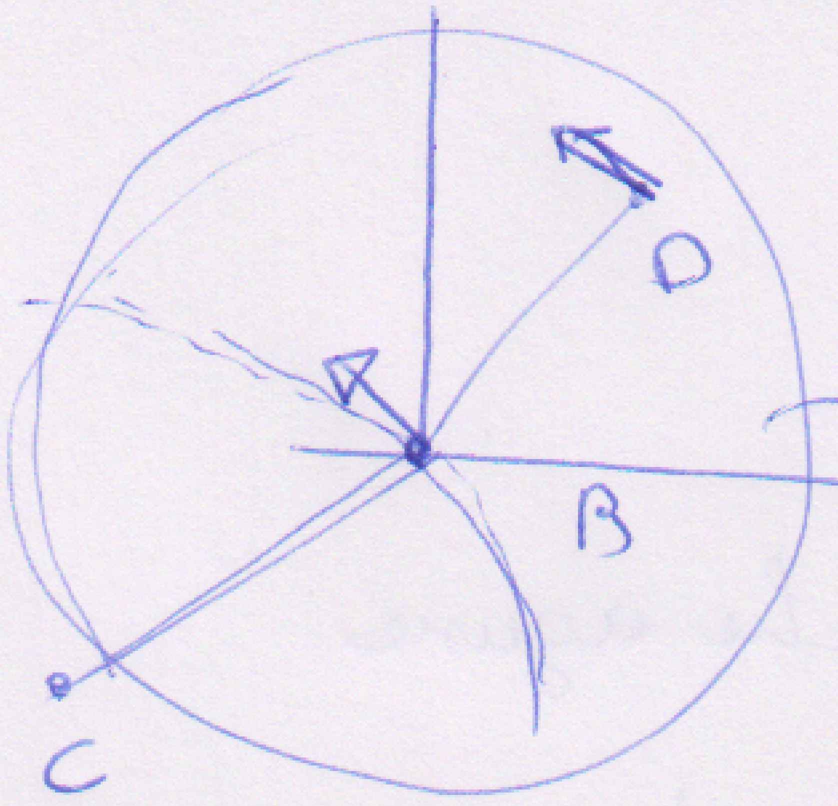
↓ consideriamo per semplicità una massa test unitaria $m=1$

<u>NOTA</u> questo calcolo vale ad un istante preciso!

quando A e B sono allineato con un asse che ho scelto come riferimento.

Appena il corpo ruota l'accel. centr. non è

In particolare, visto che S trasla lungo una traiettoria circolare (l'origine percorre un cerchio e gli assi si muovono paralleli) le velocità di tutti i punti del corpo sono uguali in modulo e direzione (forse un po' controintuitivo...)



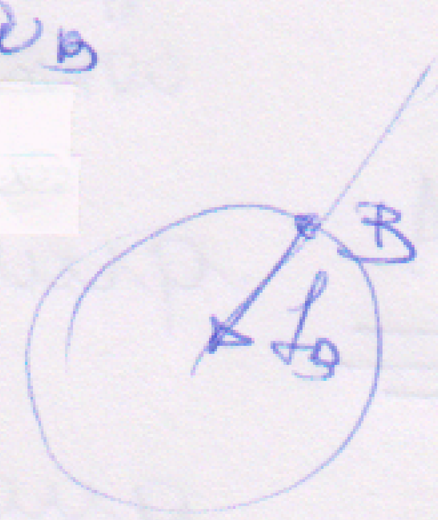
Formule fondam. moto dei rigidi

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \omega_B \wedge (D - B)$$

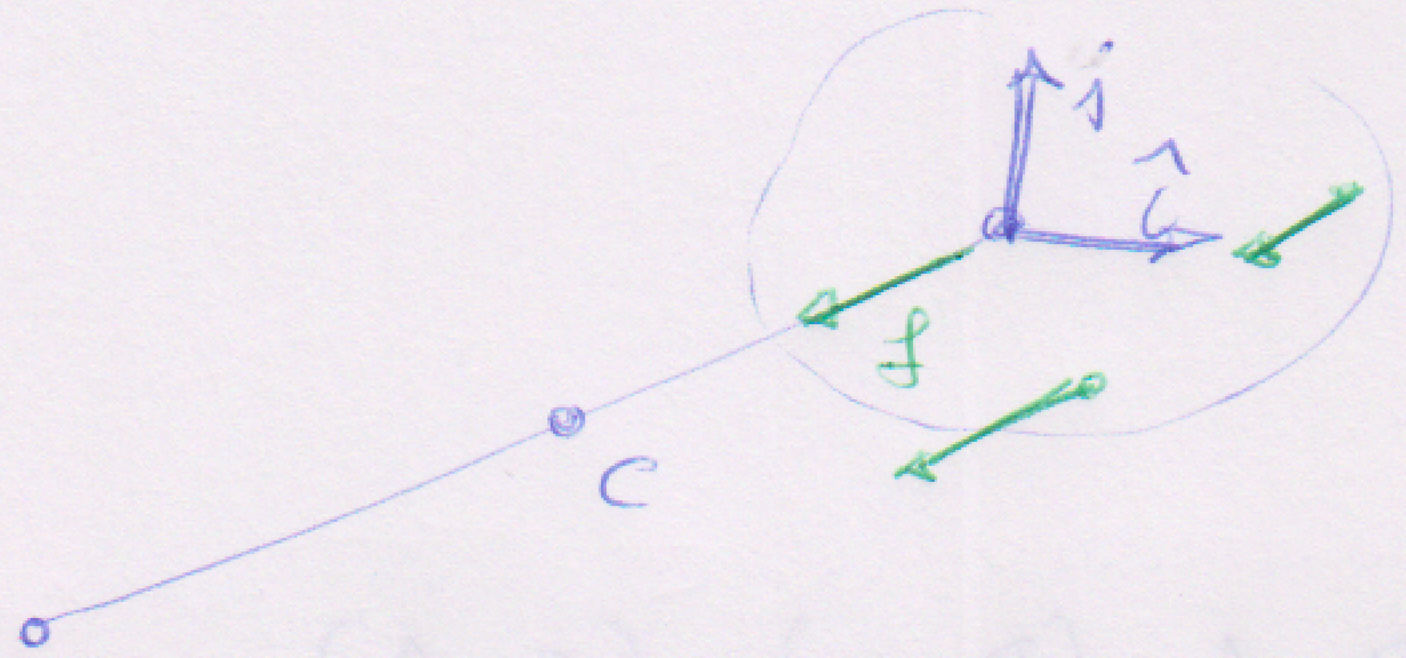
velocità angolare del corpo $= \emptyset$ per ipotesi

Quindi anche l'accelerazione è uguale in ogni punto del rigido $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}_D = \frac{d}{dt}\vec{v}_B \ldots$

Poiché B compie un moto circolare uniforme la forza centrifuga $\frac{f_B}{m_2} = \vec{a}_B$



In ogni pt. agisce la stessa forza centrifuga $f_\circ = $ [illegible] più direttamente $\hat{i}$, (anche se come detto sarà uguale per tutti i punti). In ogni ~~istante~~ però posso prendere un nuovo sist. di rif. e ripetere i calcoli



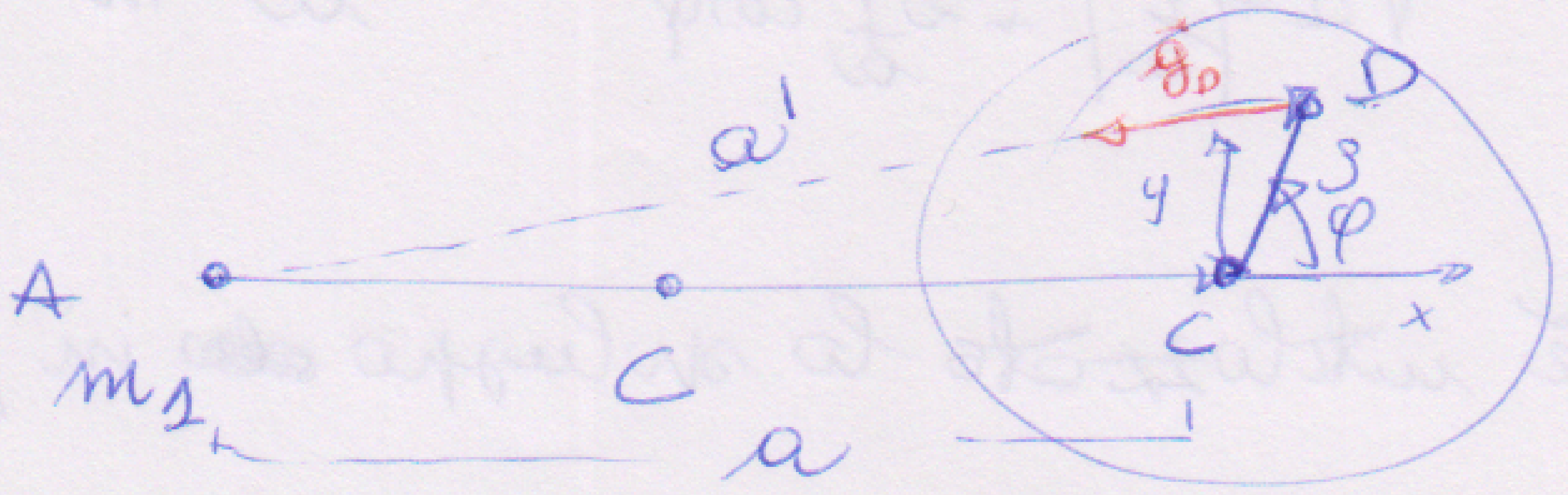
Per i nostri scopi possiamo ragionare così: fissiamo un asse passante per C e "aspettiamo" il tempo t in cui A-B-C è allineato con l'asse x sulla retta

Abbiamo trovato l'energia pot. del campo centrifugo

$$\chi = -\omega_0^2 d_2 \, x = -\omega_0^2 d_2 \, \rho \cos\varphi$$

$$= -\frac{GM}{a^3} \rho \cos\varphi \cdot d_2 = -\frac{m_1 G}{a^2} \rho \cos\varphi$$

$\downarrow$ $\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}$ $\qquad$ $\downarrow$ $d_2 = \frac{m_1 a}{M}$



$x = \rho \cos\varphi$

$$\boxed{\chi = -\frac{m_1 G}{a} \frac{\rho}{a} \underbrace{P_1(\cos\varphi)}_{= \cos\varphi}}$$

Calcoliamo adesso il potenz. gravit. agente su D dato da m_1

Forza grav. $\vec{g} = -\nabla \phi$

$$\phi = -\frac{G m_1}{a'}$$

scriviamo $\vec{a}' = D - A = \underbrace{(D-C)}_{\vec{\xi}} + \underbrace{(C-A)}_{\vec{a}}$

$$\vec{a}' = \vec{\xi} + \vec{a} \qquad a' = |a'| = |\vec{\xi} + \vec{a}|$$

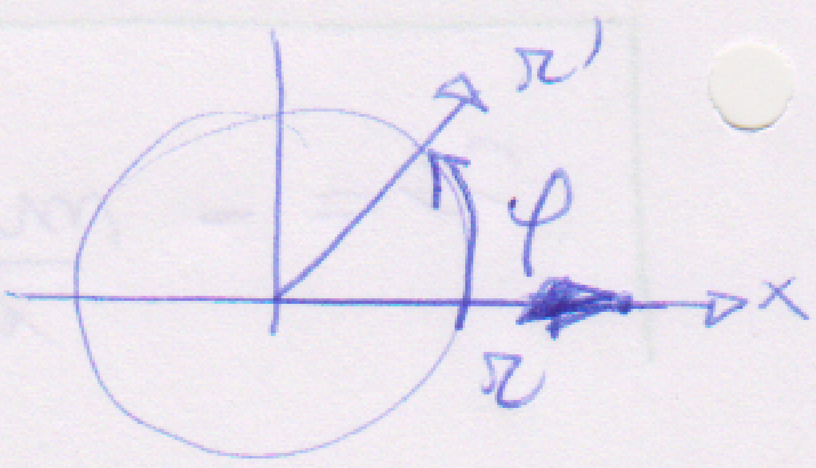
$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{|\vec{\xi}+\vec{a}|} = \left(|\xi|^2 + |\vec{a}|^2 + 2\vec{\xi}\cdot\vec{a} \right)^{-1/2}$$

$$= \left(\xi^2 + a^2 + 2a\xi\cos\varphi \right)^{-1/2} = a^{-1}\left(1 + \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \frac{2\xi\cos\varphi}{a} \right)^{-1/2}$$

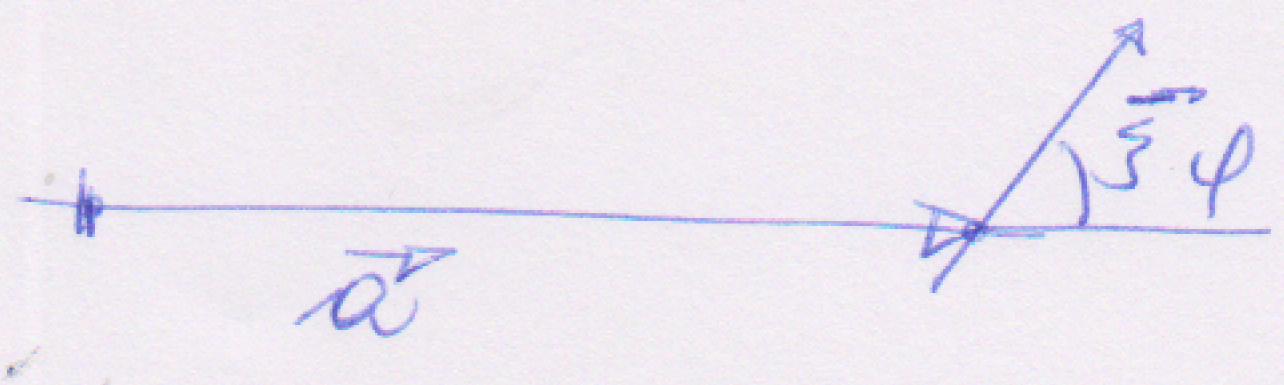
$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + 2\frac{\xi}{a}\cos\varphi}} = \frac{1}{a}\sum_n \left(\frac{\xi}{a}\right)^n P_n(\cos\varphi)$$

Dove si è utilizzato lo sviluppo in polinomi di Legendre in R^2

$$\frac{1}{|r-r'|} \overset{|r|>|r'|}{=} \sum \frac{1}{|r|}\left(\frac{|r'|}{|r|}\right)^n P_n(\cos\varphi)$$



nel nostro caso



$$\frac{1}{|\vec\xi+\vec a|}$$

$$|\xi| = \rho$$

Utilizzando l'espansione troviamo (fermandoci al secondo ordine

$$\phi = -\frac{G m_1}{a'} \simeq -\frac{G m_1}{a}\left[1 - \frac{\rho}{a}\overbrace{P_1(\cos\varphi)}^{=\cos\varphi} + \frac{\rho^2}{a^2}\underbrace{P_2(\cos\varphi)}_{=P_2(-\cos\varphi)}\right] + o(\rho/a)^2$$

Quindi il potenziale ~~totale~~ delle forze agente sul corpo B (acc. cent. + att. grav.)

$$U = \chi + \phi = -\cancel{\frac{m_1 G}{a}\frac{\rho}{a}P_1(\cos\varphi)}$$

$$-\frac{G m_1}{a}\left[1 - \cancel{\frac{\rho}{a}P_1(\cos\varphi)} + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 P_2(\cos\varphi)\right] + o(\rho/a)^3$$

$$\boxed{U = -\frac{G m_1}{a}\left[1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 P_2(\cos\varphi)\right]}$$