31 marzo 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di martedì 31 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Le due ore di lezione odierne sono dedicate alla risoluzione di esercizi proposti lo scorso venerdì 27 marzo 2020 (la prima ora) e alla presentazione e discussione di nuovi esercizi (la seconda ora), tutti riguardanti la teoria dei grafi. Alcune delle cose che vediamo in questa prima ora (ma per adesso non vi dico quali!) sono propedeutiche a una importante osservazione che faremo (parlando di colorazione delle carte geografiche) venerdì prossimo 3 aprile 2020.

Non dovreste andare avanti a leggere se non avete fatto gli esercizi. Tenete presente che (se proprio volete) potrete studiare i teoremi relativi alla colorazione delle carte geografiche anche senza il materiale che vi espongo adesso: vi divertirete meno (!) senza questo materiale, ma sarebbe un danno maggiore guardare la lezione odierna senza aver prima fatto gli esercizi. Peraltro siete tutti maggiorenni e (spero) vaccinati (almeno per quanto riguarda i vaccini disponibili…), quindi fate come volete. Io mi limito a ribadire:

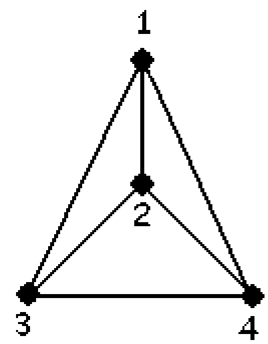
Spoiler alert: se andate avanti a leggere vi “bruciate” l’aspetto educativo importante che è legato all’attività matematica svolta in prima persona, anche soltanto nella risoluzione personale degli esercizi!

Lo dico per l’ultima volta. Adesso, se è il caso, girate pagina e iniziamo la prima ora di lezione di oggi martedì 31 marzo 2020.

Al termine della prima ora di lezione di venerdì scorso 27 marzo 2020 vi avevo chiesto di disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati il grafo di ciascuno dei cinque solidi regolari (i cosiddetti “solidi platonici”): il tetraedro regolare, l’esaedro regolare (più confidenzialmente: cubo), l’ottaedro regolare, il dodecaedro regolare e l’icosaedro regolare. In realtà, il grafo del dodecaedro ve l’avevo disegnato io, introducendo l’argomento dei grafi senza orientamento hamiltoniani. Vi avevo anche chiesto di stabilire, motivando la risposta, se ciascuno di essi è euleriano e/o hamiltoniano.

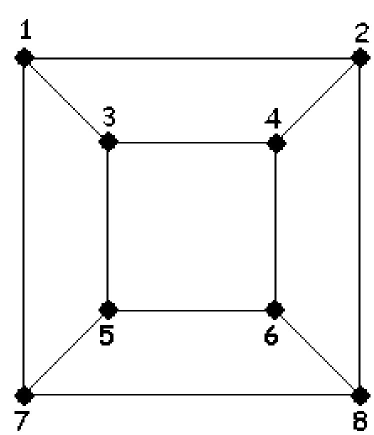
Penso che, se ci avete provato per davvero (!!!), non abbiate trovato difficoltà nel disegnare il grafo del tetraedro regolare e del cubo. Eccoli qua:

GRAFO DEL TETRAEDRO



L’avete riconosciuto? È una vecchia conoscenza: è infatti il grafo completo $\mathcal{K}_4$. Poiché nessun vertice ha grado pari, non è un grafo euleriano (e nemmeno riuscite a trovare in esso un cammino euleriano!). D’altro lato, essendo un grafo completo, è certamente hamiltoniano.

GRAFO DELL’ESAEDRO



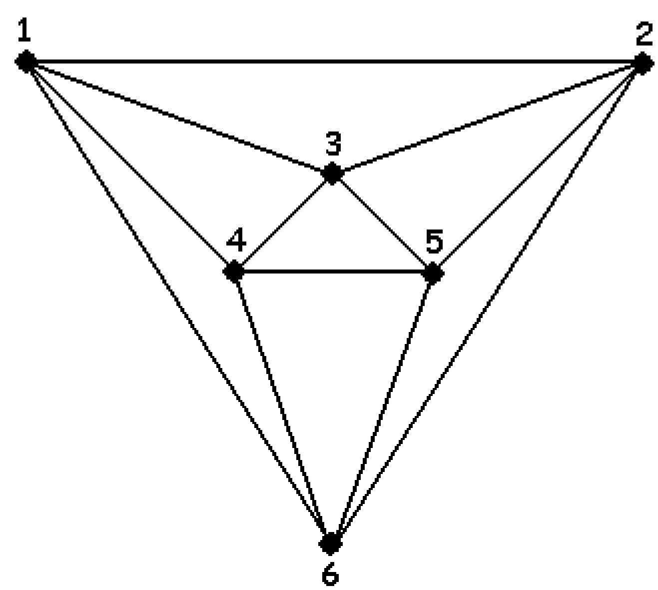
Nel grafo dell'esaedro ogni vertice ha grado dispari 3, qundi il grafo non è euleriano (e nemmeno riuscite a trovare in esso un cammino euleriano!). In effetti nei grafi dei solidi regolari ogni vertice ha lo stesso grado! Questo varrà anche per i prossimi tre casi.

Come facciamo a capire se il grafo è hamiltoniano? Il teorema di Ore non ci permette di dire niente in proposito. Ma non ci aiutano neanche le due condizioni necessarie che abbiamo studiato: infatti sono entrambe soddisfatte (il grafo è con tutta evidenza 2 – connesso, e ci sono in tutto sei facce (ve lo ricordate, vero, di contare sempre anche la faccia esterna?) che hanno tutte il bordo formato da 4 lati: non ci sono motivi per escludere che tre di esse siano interne e tre invece esterne ad un eventuale ciclo hamiltoniano.

Se i teoremi non ci aiutano, abbiamo soltanto una speranza per poter rispondere alla domanda: che il grafo ***sia*** hamiltoniano, e che risusciamo a trovare un ciclo hamiltoniano per dimostrarlo (se non riusciamo a trovarlo potremmo essere noi incapaci a farlo anche se il ciclo esiste veramente). In questo caso, trovare un ciclo hamiltoniano è facile davvero: esso tocca i vertici in questo ordine: $1-2-8-7-5-6-4-3-1$.

Appena un pelino più difficile è disegnare il grafo dell’ottaedro:

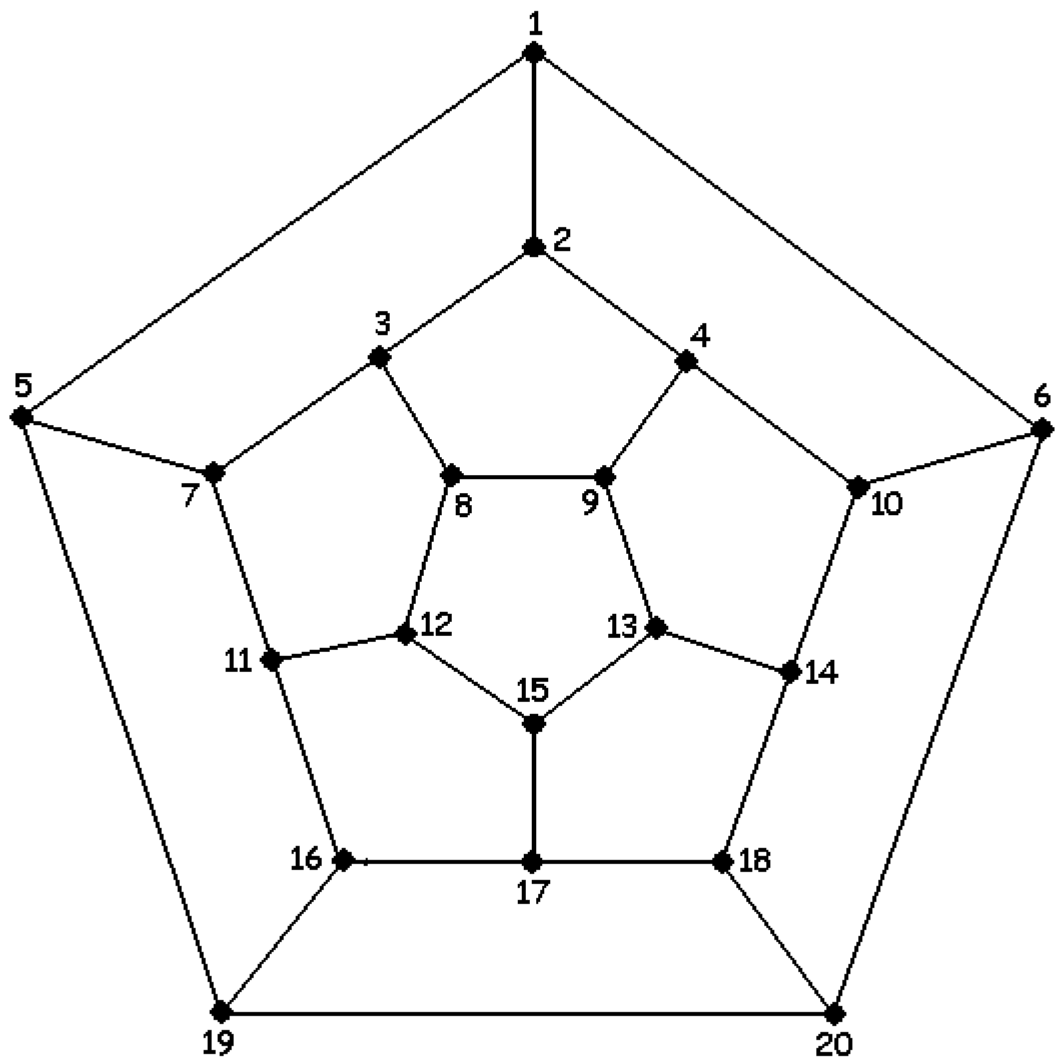
GRAFO DELL’OTTAEDRO



Questa volta ogni vertice ha grado pari 4, qundi il grafo (essendo connesso) è euleriano! Inoltre possiamo applicare il teorema di Ore per concludere che il grafo è anche hamiltoniano.

Già conoscete il grafo del dodecaedro e sapete che è hamiltoniano!

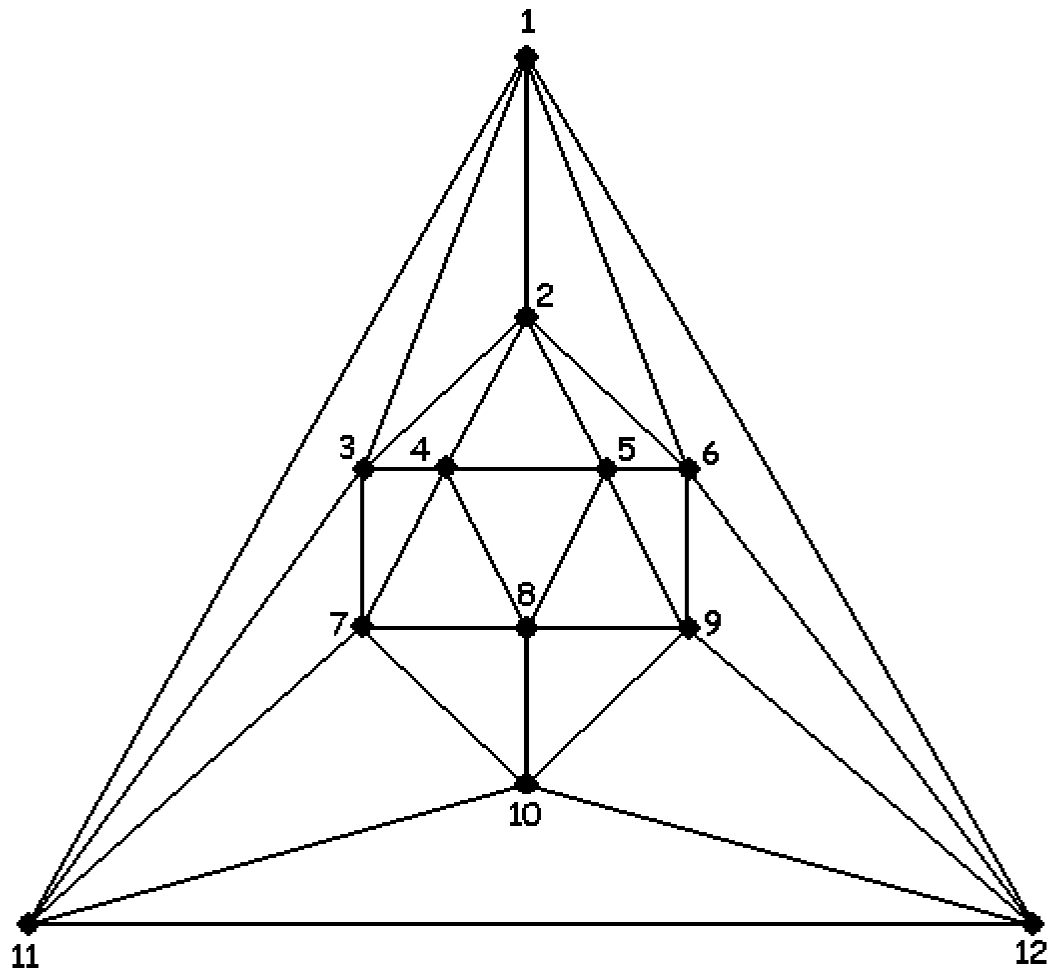
GRAFO DEL DODECAEDRO



Nessun vertice ha grado pari, quindi non abbiamo speranza che il grafo sia euleriano e nemmeno che vi si possa trovare un cammino euleriano.

Forse l’unico esercizio veramente impegnativo era disegnare il grafo dell’icosaedro:

GRAFO DELL’ICOSAEDRO

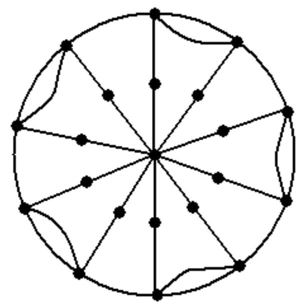


Però non era certo difficile scoprire che il grafo, avendo dodici vertici tutti di grado dispari, non è euleriano e nemmeno possiede un cammino euleriano. È però hamiltoniano, anche se (come per l’esaedro) l’unico modo per dimostrarlo è esibire un ciclo hamiltoniano: $1 - 11 - 12 - 10 - 7 - 3 - 4 - 8 - 9 - 6 - 5 - 2 - 1$.

Vediamo adesso gli esercizi che vi avevo assegnato nella seconda ora di lezione dello scorso venerdì 27 marzo 2020.

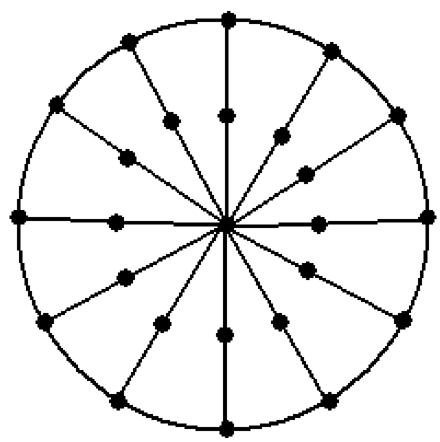
Esercizio 1

Dite se il grafo disegnato qui sotto, che ha 21 vertici e 35 lati, è euleriano e/o hamiltoniano.



Soluzione – Poiché $\mathcal{G}$ è connesso, e ogni suo vertice ha grado pari, $\mathcal{G}$ è euleriano.

Per stabilire se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano, possiamo ragionare sul sostegno $\mathcal{G}^*$ di $\mathcal{G}$, che è un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati con 10 facce il cui bordo è un ciclo di lunghezza 5 e un’altra faccia (quella esterna) il cui bordo è un ciclo di lunghezza 10:



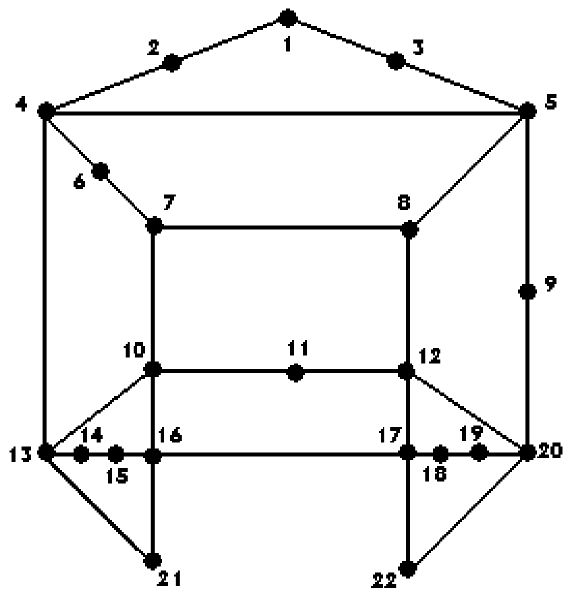
Supponiamo che in $\mathcal{G}^*$ esista un ciclo hamiltoniano; detta x la differenza fra il numero delle $5-$ facce interne al ciclo e il numero delle $5-$ facce esterne al ciclo, per il teorema di Grinberg dovrebbe essere

$$3x = \pm 8 \,.$$

Ma questo è assurdo, perché 8 non è multiplo di 3. Dunque $\mathcal{G}^*$ non è hamiltoniano, e pertanto nemmeno $\mathcal{G}$ lo è.

Esercizio 2

Considerate il grafo disegnato qui sotto, che ha 22 vertici (numerati da 1 a 22) e 31 lati. È un grafo euleriano? È un grafo hamiltoniano? Questo disegno può essere tracciato (partendo da un vertice) senza mai ripassare sullo stesso tratto? Se la risposta è affermativa, si può partire da qualsiasi vertice? Oppure da quale/i?



Soluzione – Da un controllo diretto risulta che tutti i vertici di $\mathcal{G}$ hanno grado pari, tranne quelli contrassegnati dai numeri 7 e 8 che hanno grado dispari. Dunque $\mathcal{G}$ non è euleriano, ma (essendo connesso) ha (almeno) un cammino euleriano, e ogni cammino euleriano di $\mathcal{G}$ parte dal vertice numero 7 e termina nel vertice numero 8 o viceversa: questo significa che il disegno proposto può essere tracciato senza mai ripassare sullo stesso tratto, ma si deve necessariamente partire dal vertice 7 (e arrivare nel vertice 8) oppure partire dal vertice 8 (e arrivare nel vertice 7).

Resta da stabilire se $\mathcal{G}$ sia hamiltoniano; poiché $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati ed ha esattamente 11 facce (10 col bordo di 5 lati e una col bordo di 12 lati), possiamo applicare il teorema di Grinberg. Supponiamo che in $\mathcal{G}$ esista un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$, e sia x la differenza fra il numero e_5 delle facce col bordo di 5 lati esterne a $\mathcal{C}$ e il numero i_5 delle facce col bordo di 5 lati interne a $\mathcal{C}$; per il teorema di Grinberg deve essere

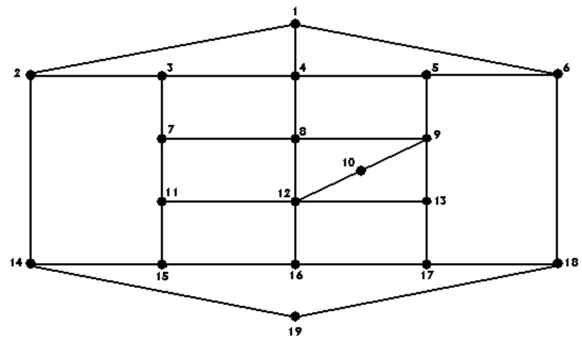
$$3x = \pm 10$$

ma questo è assurdo perché il primo membro è multiplo di 3 ma il secondo non lo è: dunque in $\mathcal{G}$ non può esistere un ciclo hamiltoniano, cioè $\mathcal{G}$ non è hamiltoniano.

Esercizio 3

Considerate il grafo senza orientamento disegnato qui sotto, che ha 19 vertici (numerati da 1 a 19) e 30 lati e dite, motivando la risposta, se ha

- un circuito euleriano;
- un cammino euleriano (e in tal caso quali sono i possibili estremi);
- un ciclo hamiltoniano.



Soluzione – Da un controllo diretto risulta che soltanto i vertici contrassegnati dai numeri 4, 8, 9, 10 e 19 hanno grado pari, mentre gli altri quattordici vertici hanno grado dispari. Dunque $\mathcal{G}$ non è euleriano, né possiede un cammino euleriano.

Resta da stabilire se $\mathcal{G}$ sia hamiltoniano. Poiché $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati ed ha esattamente 13 facce (4 col bordo di 6 lati e 9 col bordo di 4 lati), possiamo cercare di applicare il teorema di Grinberg.

Supponiamo che in $\mathcal{G}$ esista un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$; sia x la differenza fra il numero e_6 delle facce col bordo di 6 lati esterne a $\mathcal{C}$ e il numero i_6 delle facce col bordo di 6 lati interne a $\mathcal{C}$, e sia y la differenza fra il numero e_4 delle facce col bordo di 4 lati esterne a $\mathcal{C}$ e il numero i_4 delle facce col bordo di 4 lati interne a $\mathcal{C}$; per il teorema di Grinberg deve essere

$$4x = \pm 2y\,.$$

Si osservi ora che, poiché le facce col bordo di 4 lati sono in tutto 9, y deve essere un numero dispari: per vedere questo fatto, basta fare tutti i casi possibili; ma la cosa si può anche vedere in modo elegantemente compatto, osservando che se $e_4 + i_4$ è un numero dispari d allora $e_4 - i_4$ non può essere un numero pari p, perché in tal caso dalle relazioni

$$e_4 + i_4 = d$$
$$e_4 - i_4 = p$$

sommando membro a membro si avrebbe

$$2e_4 = d + p$$

che è un’uguaglianza assurda, perché al primo membro c’è un numero pari mentre al secondo membro c’è un numero dispari. Dunque il secondo membro dell’uguaglianza

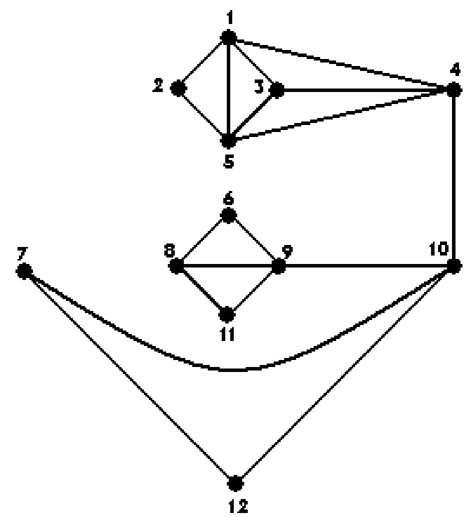
$$4x = \pm 2y$$

non è divisibile per 4, mentre il primo lo è: si è raggiunto un assurdo, il quale prova che $\mathcal{G}$ non può avere un circuito hamiltoniano.

Esercizio 4

Considerate il grafo senza orientamento disegnato qui sotto, che ha 12 vertici (numerati da 1 a 12) e 18 lati e dite, motivando la risposta, se ha

– un circuito euleriano;
– un cammino euleriano (e in tal caso quali sono i possibili estremi);
– un ciclo hamiltoniano.



Soluzione – Da un controllo diretto risulta che i vertici contrassegnati dai numeri 3 e 8 hanno grado dispari, mentre gli altri dieci vertici hanno grado pari. Dunque $\mathcal{G}$ non ha un ciruito euleriano, ma possiede un cammino euleriano i cui estremi sono i vertici contrassegnati dai numeri 3 e 8.

Sopprimendo il vertice contrassegnato dal numero 4 (o quello contrassegnato dal numero 9, o quello contrassegnato dal numero 10) si ottiene un grafo non connesso; dunque $\mathcal{G}$ non è 2 – connesso, e pertanto (ricordate il teorema 6.3.1?) non può essere hamiltoniano.

Nella prossima ora di lezione discuteremo altri esercizi di teoria dei grafi, non necessariamente legati al concetto di “grafo euleriano” e/o di “grafo hamiltoniano”.