31 marzo 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di martedì 31 marzo 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

In questa seconda ora “virtuale” di lezione vediamo un po’ di esercizi assortiti sui grafi. L’argomento che studieremo venerdì prossimo 3 aprile nell’ultima giornata dedicata alla teoria dei grafi, cioè la colorazione delle carte geografiche, non si presta moltissimo ad esercizi; anche se vedrete che qualcosa per farvi scervellare sull’argomento la tirerò fuori.

Venerdì 3 aprile metterò anche in rete, nella stessa pagina e-learning (“Moodle”) in cui trovate queste lezioni, altri esercizi in modo che sull’argomento possiate verificare le vostre competenze e capacità (un giorno forse qualche pedagogo intelligente mi spiegherà la differenza fra questi due termini, per ora non ne ho trovati nessuno. . .).

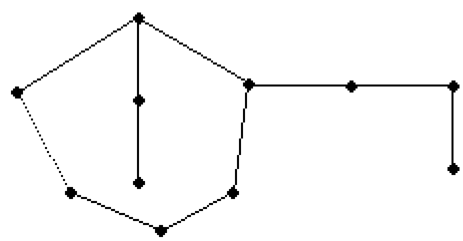
Esercizio 1

Un grafo connesso $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati e le sue facce hanno il bordo formato da 3 o 12 lati; precisamente, ci sono 12 facce col bordo formato da 3 lati e una faccia col bordo formato da 12 lati. Inoltre, sei vertici di $\mathcal{G}$ hanno grado 2 e tutti gli altri, tranne uno che indicheremo con v_0, hanno grado 5. Nessun vertice ha grado 1.
Si dica:

– quanti lati ha $\mathcal{G}$;
– quanti vertici ha $\mathcal{G}$;
– qual è il grado di v_0;
– se $\mathcal{G}$ è euleriano.

Soluzione – Negli esercizi che vi propongo, dovete sempre partire dal presupposto che non sono poi così carogna (!), e quindi se vi propongo più domande in un certo ordine è ragionevole affrontarle in quello stesso ordine, perché magari la prima risposta serve a trovare la seconda, e così via…

Cominciamo dunque a cercare quanti sono i lati del grafo. Le informazioni sul numero delle facce e sul numero dei lati che compaiono sul bordo delle facce ci permettono di trovare quanti lati in totale compaiono sul bordo delle facce. Possono esserci lati che non contribuiscono al bordo di nessuna faccia? In generale sì, come in questo esempio:



Però capite che la presenza di lati che non appartengono al bordo di nessuna faccia comporta l’esistenza di foglie (= vertici di grado uno) che possiamo escludere in base ai dati del problema. Dunque in effetti ogni lato appartiene al bordo di ***esattamente due facce***!

Il numero totale dei lati che compaiono nei bordi delle facce è

$$12 \cdot 3 + 1 \cdot 12 = 36 + 12 = 48\,.$$

Poiché ***ogni*** lato viene contato ***nel bordo di due facce***, ci sono in tutto 24 lati.

Per la formula di Euler, se $\mathcal{G}$ ha 24 lati, n vertici e 13 facce deve essere

$$n - 24 + 13 = k + 1$$

dove k è il numero delle componenti connesse di $\mathcal{G}$. Ma i dati del problema ci dicono esplicitamente che $\mathcal{G}$ è connesso, cosicché $k = 1$ e dalla formula di Euler possiamo ricavare che

$$n - 11 = 2$$

cosicché $\mathcal{G}$ ha 13 vertici (dei quali sei hanno grado 2 e sei hanno grado 5). Poiché la somma dei gradi di tutti i vertici è uguale al doppio del numero dei lati, detto g_0 il grado di v_0 deve essere

$$6 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + g_0 = 48$$

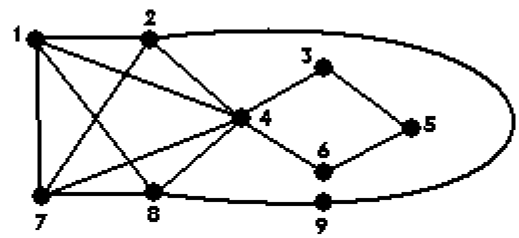
da cui $g_0 = 6$.

Infine, $\mathcal{G}$ non è euleriano perché ha vertici di grado dispari.

Esercizio 2

Sia $\mathcal{G}$ il grafo disegnato qui di seguito, che ha 9 vertici e 15 lati. Si dica:

– se $\mathcal{G}$ può essere disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati;
– se $\mathcal{G}$ è euleriano;
– se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.



Soluzione – Di fronte a un problema di planarità, a meno che non sia subito evidente che ridisegnando qualche lato si ottiene un disegno dello stesso grafo senza sovrapposizione di lati, conviene sottoporre il grafo al test indicato dal teorema 4.2.1. Bisogna contare il numero n dei vertici (nel problema che stiamo considerando i vertici sono numerati da 1 a 9 e quindi sono esattamente nove) e il numero λ dei lati (il modo migliore per farlo senza rischiare di confondersi è utilizzare il teorema 1.3.1 sommando il grado di tutti i vertici e poi dividendo per 2; nel nostro caso

$$\lambda = \frac{4+4+2+6+2+2+4+4+2}{2} = 15 \text{).}$$

Poi bisogna trovare il calibro (che nel nostro caso è 3, perché abbiamo cicli di lunghezza 3 come ad esempio $1-2-7$) e infine verificare se vale la condizione necessaria affinché il grafo sia piano, cioè

$$\lambda \leq \frac{c}{c-2}(n-2).$$

Nel nostro caso deve dunque essere

$$15 \leq 3(9-2) = 21$$

e dunque la condizione è soddisfatta. Questa informazione non ci permette di concludere niente, ma può spingerci a fare altri tentativi per ridisegnare il grafo in modo che non ci sia sovrapposizione di lati.

Quando, dopo un certo numero di tentativi, ci accorgiamo che proprio sembra impossibile disegnare il grafo senza sovrapposizione di lati, non resta che cercare di applicare il teorema di Kuratowski.

Il teorema di Kuratowski esprime una condizione necessaria e sufficiente affinché il grafo sia piano, ma francamente la parte sufficiente (che è quella difficile da dimostrare, e per essa *chapeau* al signor Kuratowski!) è defatigante e quasi impossibile da applicare perché ci chiede di controllare tutti i sottografi di $\mathcal{G}$ e verificare che nessuno di essi sia una suddivisione di $\mathcal{K}_5$ o $\mathcal{K}_{3,3}$.

È certamente più semplice trovare un sottografo di $\mathcal{G}$ che sia isomorfo a $\mathcal{K}_5$ o $\mathcal{K}_{3,3}$ oppure a una suddivisione di $\mathcal{K}_5$ o $\mathcal{K}_{3,3}$. Cominciamo quindi a cercare un tale sottografo. E cominciamo da $\mathcal{K}_5$, perché richiede di individuare cinque vertici ciascuno di grado $4\ldots$ e in $\mathcal{G}$ ci sono appunto esattamente cinque vertici di grado 4, precisamente quelli contrassegnati dai numeri $1, 2, 4, 7$ e 8. Se ciascuno di essi fosse adiacente agli altri 4 avremmo trovato un sottografo di $\mathcal{G}$ isomorfo a $\mathcal{K}_5$ e potremmo concludere che $\mathcal{G}$ non si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati. Se$\ldots$

Andiamo dunque a vedere. Il vertice 1 è in effetti adiacente al 2, al 4 al 7 e all’8. Il vertice 4 è adiacente all’1, al 2, al 7 e all’8. E il vertice 7 è adiacente all’1, al 2, al 4 e all’8. Rimangono il vertice 2 e il vertice 8. Il vertice 2 è adiacente all’1, al 7, al 4 e (ahi ahi ahi) al 9. Il vertice 8 è adiacente all’1, al 4, al 7 e anch’esso al 9. A questo punto non è difficile accorgersi che sopprimendo il vertice 9 e fondendo in un unico lato di estremi $2-8$ i due lati di estremi $2-9$ e $9-8$ avremmo un grafo isomorfo a $\mathcal{K}_5$: in altre parole, il sottografo di $\mathcal{G}$ indotto dai vertici $1, 2, 4, 7, 8$ e 9 è una suddivisione di $\mathcal{K}_5$, e questo fatto ci permette di concludere che $\mathcal{G}$ non si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati.

Il grafo $\mathcal{G}$ è poi euleriano perché è connesso e ogni vertice ha grado pari; ma non è hamiltoniano perché non è $2-$ connesso (sopprimendo il vertice 4 e tutti i lati ad esso incidenti, il grafo risultante non è più connesso).

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$

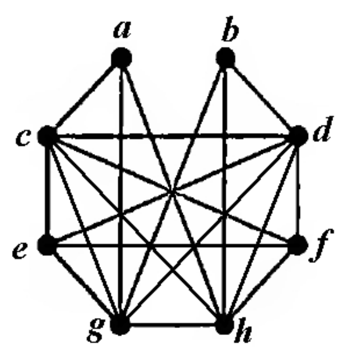
Sia $\mathcal{G}$ il grafo senza orientamento disegnato qui sotto, che ha come vertici i punti a, b, c, d, e, f, g, h. Si dica:

(i) se $\mathcal{G}$ è euleriano;

(ii) se $\mathcal{G}$ ha un cammino euleriano (specificando nel caso che la risposta sia affermativa il vertice inziale e il vertice finale del cammino euleriano).

(iii) se $\mathcal{G}$ è un grafo piano;

(iv) se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.



Soluzione – Da un controllo diretto risulta che i vertici c, d, e, f, g e h hanno grado pari, mentre i vertici a e b hanno grado dispari. Dunque $\mathcal{G}$ non è euleriano, ma possiede un cammino euleriano che necessariamente inizia in a e finisce in b o viceversa.

Poiché $\mathcal{G}$ ha calibro 3 (si veda ad esempio il ciclo $a - h - g$), 8 vertici e 19 lati, se esistesse un disegno nel piano di $\mathcal{G}$ senza sovrapposizione di lati varrebbe la disuguaglianza

$$19 \leq 3 \cdot (8 - 2) = 18$$

e dunque si può concludere che $\mathcal{G}$ non è un grafo piano.

Resta da stabilire se $\mathcal{G}$ sia hamiltoniano; una verifica diretta mostra che

$$a - h - b - d - f - c - e - g - a$$

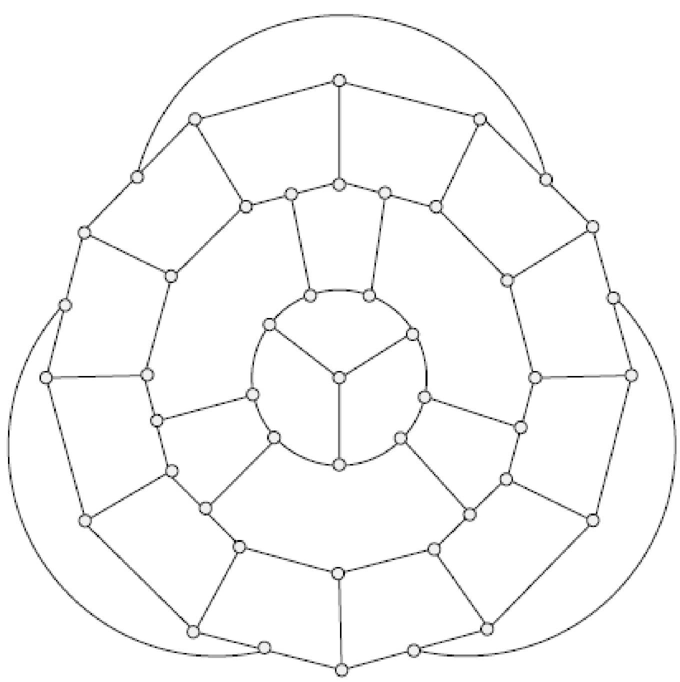
è un ciclo hamiltoniano di $\mathcal{G}$, dunque $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.

Esercizio 4

Sia $\mathcal{G}$ il grafo senza orientamento disegnato qui sotto, che ha 46 vertici e 69 lati.

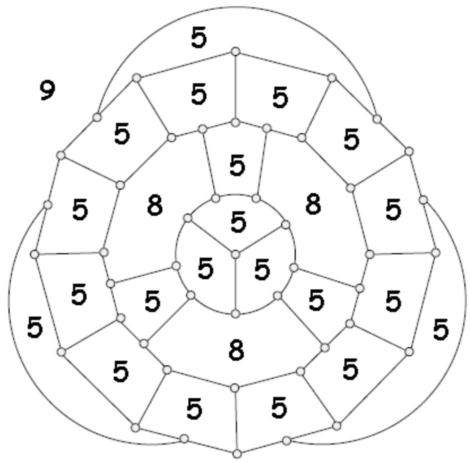
Si dica se $\mathcal{G}$ ha

- un circuito euleriano;
- un cammino euleriano (e in tal caso quali sono i possibili estremi);
- un ciclo hamiltoniano.



Soluzione – Poiché ogni vertice di $\mathcal{G}$ ha grado 3, $\mathcal{G}$ non è euleriano né ammette un cammino euleriano. Per valutare se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano, poiché $\mathcal{G}$ è disegnato sul piano senza sovrapposizione di lati possiamo cercare di applicare il teorema di Grinberg.

Segniamo in ogni faccia il numero dei lati che ne formano il bordo:



Supponiamo che in $\mathcal{G}$ esista un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$; sia x la differenza fra il numero e_5 delle facce col bordo di 5 lati esterne a $\mathcal{C}$ e il numero i_5 delle facce col bordo di 5 lati interne a $\mathcal{C}$; sia y la differenza fra il numero e_8 delle facce col bordo di 8 lati esterne a $\mathcal{C}$ e il numero i_8 delle facce col bordo di 8 lati interne a $\mathcal{C}$; osserviamo infine che esiste una sola faccia col bordo di 9 lati, necessariamente esterna a $\mathcal{C}$. Per il teorema di Grinberg deve essere

$$3x + 6y + 7 = 0$$

ossia

$$7 = -3x - 6y$$

ma questo è assurdo perché il primo membro non è multiplo di 3 mentre il secondo lo è: dunque in $\mathcal{G}$ non può esistere un ciclo hamiltoniano, cioè $\mathcal{G}$ non è hamiltoniano.