

## METODI DI DEFINIZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO DI SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

Per azione dinamica s'intende un'azione variabile nel tempo e tale da produrre un moto cui sono associate forze d'inerzia e dissipative che entrano in gioco nell'equazione di equilibrio in aggiunta alle componenti elastiche. Se si considera il caso del portale in Figura 1, la differenza di posizione del problema di equilibrio elastico in ambito statico ed in quello dinamico è chiaramente ravvisabile dalla scrittura delle relative equazioni:

$$\text{Equazione di equilibrio in ambito statico: } kx = P \quad (1)$$

$$\text{Caso di forza esterna applicata: } m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P(t) \quad (2)$$

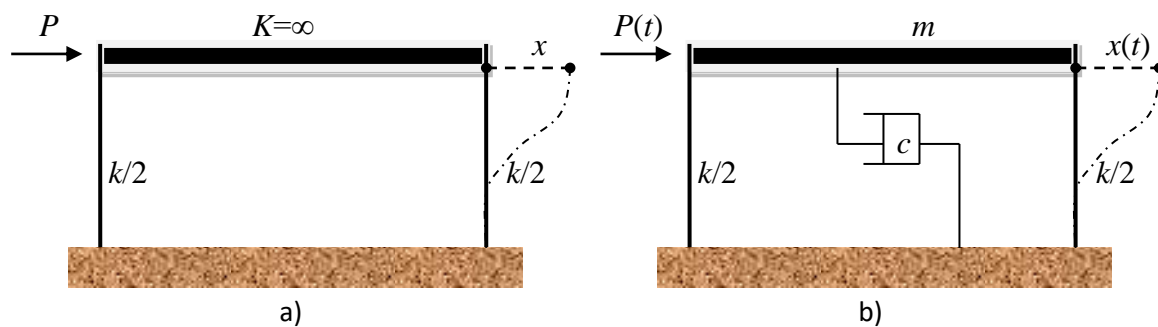


Figura 1 – a) Condizione di equilibrio statico; b) condizione di equilibrio dinamico

In generale si può affermare che un sistema si trovi nella condizione di equilibrio dinamico quando, istante per istante, un'azione esterna variabile nel tempo produce una risposta tale da equilibrare essa stessa oltre alla somma vettoriale delle forze d'inerzia e dissipative, essendo queste ultime non note a priori.

Una qualunque struttura può essere ricondotta a schemi dinamici semplici, caratterizzati da una o più coordinate di spostamento che ne individuino il movimento nel tempo. Nell'ambito della trattazione dinamica classica tali coordinate vengono denominate "generalizzate" o "lagrangiane" e rappresentano le equivalenti dei "movimenti indipendenti" nell'applicazione del "metodo dell'equilibrio" per la soluzione di problemi elastici di tipo statico: esse sono infatti linearmente indipendenti e dalla loro conoscenza può essere univocamente definita la variazione temporale dello stato deformativo e tensionale del sistema in esame.

Una struttura viene generalmente identificata come oscillatore semplice (Single Degree Of Freedom – SDOF) quando il suo moto è soddisfacentemente interpretabile mediante una sola coordinata generalizzata.

E' questo il caso del portale rappresentato in Figura 1b, per cui il solo spostamento del traverso,  $x(t)$ , consente di definirne univocamente la condizione di equilibrio dinamico. L'equazione (2) può essere ottenuta seguendo tre metodi tra loro equivalenti, di seguito illustrati. Essi consistono nell'applicazione rispettivamente del principio di D'Alembert, del teorema dei lavori virtuali, e del teorema di Hamilton.

- Definizione dell'equazione del moto mediante il principio di D'Alembert

Secondo il principio di D'Alembert le forze agenti sulla massa  $m$ , comprese le forze d'inerzia, devono formare in ogni istante un sistema equilibrato. Le forze agenti sono la forza esterna applicata  $P(t)$ , la forza elastica di richiamo,  $f_E$ , la forza d'inerzia,  $f_I$ , e la forza dissipativa  $f_D$ . Riguardo a quest'ultimo termine si osserva come esso esista sempre, per strutture reali pur deformate dinamicamente in campo elastico (ovvero in grado di recuperare la deformazione al termine dell'azione applicata), in virtù dell'inesistenza della condizione di moto perpetuo. Nel caso di sistemi dinamici classici come quello rappresentato in Figura 1b, l'azione smorzante deve essere attribuita alle colonne, da intendere come elementi elastici realizzati mediante materiali come l'acciaio, il cemento armato, il legno etc..., naturalmente dissipativi in relazione alla loro risposta ciclica nel tempo, generalmente riconducibile ad un'ellisse (Figura 2b). Tale contributo di forza  $f_D$  è generalmente considerato includendo nel modello un dispositivo oleodinamico come quello indicato nello schema in Figura 1b e riproposto in Figura 2a.

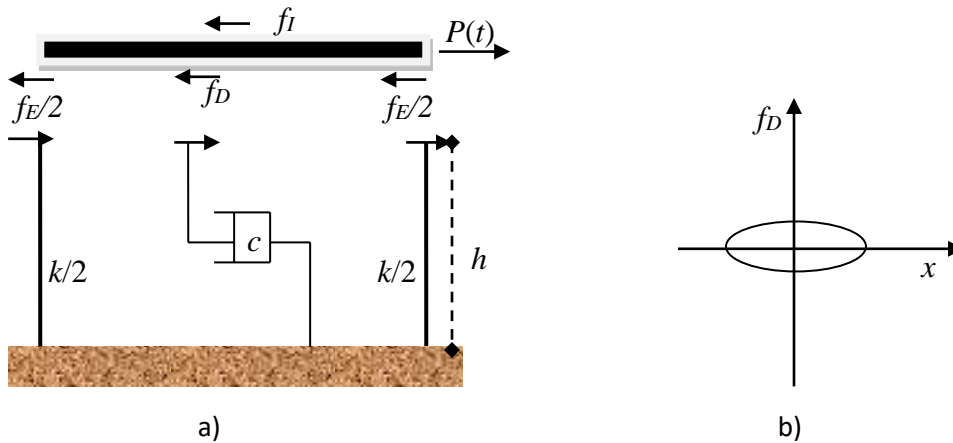


Figura 2 – a) Condizione di equilibrio dinamico del traverso; b) risposta ciclica di un sistema con viscosità lineare

Mentre la forza esterna applicata  $P(t)$  è una funzione nota del tempo, le altre componenti sono legate alle funzioni di spostamento  $x(t)$ , di velocità  $\dot{x}(t)$  e di accelerazione  $\ddot{x}(t)$  dalle seguenti espressioni:

$$f_E = -kx(t) \quad (3)$$

$$f_I = -m\ddot{x}(t) = -ma(t) \quad (4)$$

$$f_D = -c\dot{x}(t) = -cv(t) \quad (5)$$

Nella (3) con  $k$  viene indicata la rigidezza alla traslazione dei pilastri con comportamento "shear type", ovvero la forza di richiamo elastica da essi indotta corrispondentemente ad uno spostamento unitario del traverso:

$$k = 2 \left( 12 \frac{EJ}{h^3} \right) \quad (6)$$

L'equazione del moto ha pertanto l'espressione:

$$-m\ddot{x}(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) + P(t) = 0 \quad (7)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti nella funzione incognita  $x(t)$ .

- *Definizione dell'equazione del moto per applicazione del teorema dei lavori virtuali*

Secondo il teorema dei lavori virtuali il lavoro di tutte le forze presenti, comprese le forze d'inerzia, deve essere nullo per un qualsiasi spostamento virtuale  $\delta x$ .  
Dalle espressioni (3), (4) e (5) si ricava:

$$(-m\ddot{x}(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) + P(t))\delta x = 0 \quad (8)$$

Dovendo essere verificata in ogni istante e per un qualunque spostamento virtuale, la (8) produce l'equazione del moto già ottenuta dall'applicazione del principio di D'Alembert. Il teorema dei lavori virtuali sembra, per il caso considerato, un'inutile complicazione rispetto al più immediato principio di D'Alembert. Tuttavia, nell'equazione del lavoro virtuale i contributi delle forze compaiono sotto forma di grandezze scalari e ciò può sensibilmente facilitare la scrittura dell'equazione del moto per strutture di maggiore complessità dove la natura vettoriale delle forze renda difficoltosa l'applicazione del principio di D'Alembert. E' importante peraltro notare che il teorema dei lavori virtuali richiede, come il principio di D'Alembert, la preventiva esplicitazione delle forze elastica, dissipativa e d'inerzia in funzione dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione, rispettivamente.

- *Definizione dell'equazione del moto per applicazione del teorema di Hamilton*

Prima d'introdurre il teorema di Hamilton è opportuno definire l'energia cinetica  $T$ :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (9)$$

la funzione di dissipazione  $D$ :

$$D = \frac{1}{2}c \int_{-\infty}^t v^2 d\tau \quad (10)$$

e l'energia potenziale totale  $V$ :

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - p_c x \quad (11)$$

Nella (11)  $p_c$  rappresenta la risultante delle forze conservative applicate al sistema. Ai fini della generalizzazione del problema si considerino inoltre anche eventuali forze non conservative di risultante  $p_n$  a cui sia associato il seguente lavoro  $W_n$ :

$$W_n = - \int_{-\infty}^t p_n v d\tau \quad (12)$$

Per ogni intervallo temporale  $[t_1, t_2]$  si definisce il funzionale di Hamilton  $H(t_1, t_2)$ :

$$H(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (T - V + D + W_n) d\tau \quad (13)$$

Esso rappresenta uno scalare dipendente dalla funzione di spostamento  $x$  e dalla sua derivata prima,  $v$ , attraverso le espressioni di  $T$ ,  $V$ ,  $D$  e  $W_n$ . Se al posto della  $x$  si considerasse un'altra funzione diversa dalla risposta effettiva della struttura, il funzionale di Hamilton assumerebbe un valore differente da quello reale. Si consideri ora l'insieme di tutte le possibili funzioni con derivata continua e coincidenti, negli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , con la funzione  $x$ . Sotto ipotesi generalmente verificate nei casi di pratico interesse il teorema di Hamilton afferma che, tra tutte queste funzioni, la  $x$  soluzione del problema dinamico è quella che, per ogni intervallo temporale  $[t_1, t_2]$ , fa assumere al funzionale di Hamilton il valore minimo.

Il teorema di Hamilton rappresenta l'estensione al caso dinamico del teorema di minimo dell'energia potenziale totale.

La funzione  $x$  che rende minimo il funzionale di Hamilton  $H(t_1, t_2)$  può essere ottenuta, secondo un teorema di calcolo delle variazioni, per soluzione della seguente equazione differenziale di Eulero seguente:

$$\frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial v} = 0 \quad (14)$$

Dalle espressioni di  $T$ ,  $V$ ,  $D$  e  $W_n$  si ricava:

$$\frac{\partial(T)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial(T)}{\partial v} = mv \quad (15.a)$$

$$\frac{\partial(V)}{\partial x} = kx - p_c; \quad \frac{\partial(V)}{\partial v} = 0 \quad (15.b)$$

$$\frac{\partial(D)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial(D)}{\partial v} = c \int_{-\infty}^t v d\tau \quad (15.c)$$

$$\frac{\partial(W_n)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial(W_n)}{\partial v} = - \int_{-\infty}^t p_n d\tau \quad (15.d)$$

dalle quali si ottiene:

$$\frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial x} = kx - p_c \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} (mv + c \int_{-\infty}^t v d\tau - \int_{-\infty}^t p_n d\tau) \quad (17)$$

La (14) pertanto diventa:

$$-ma - cv - kx + p_c + p_n = 0 \quad (18)$$

che coincide con la (7) ove si ponga:

$$P(t) = p_c(t) + p_n(t)$$

La maggior complessità di applicazione del teorema di Hamilton è giustificata dalla circostanza che esso non richiede l'esplicitazione delle forze, ma soltanto di grandezze scalari come le energie  $T$ ,  $V$ ,  $D$  e  $W_n$ . Ciò ne rende particolarmente interessante l'impiego nel caso di analisi di sistemi complessi per i quali l'esplicitazione delle forze richiesta dal principio di D'Alembert o dal teorema dei lavori virtuali necessita di operazioni su vettori di non sempre facile interpretazione.

## SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

- Sistema non smorzato nello stato di oscillazioni libere

Si consideri un sistema dinamico idealmente non smorzato e se ne definisca l'equazione del moto in assenza di forzanti esterne:

$$m\ddot{x} + kx = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (19)$$

La (19) è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti la cui soluzione generale è data dalla seguente funzione:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (20)$$

Nella (20)  $C_1$  e  $C_2$  sono due costanti complesse coniugate ed  $s_1, s_2$  rappresentano le due soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$ms^2 + k = 0 \quad (21)$$

definite come:

$$s_{1,2} = \pm i \sqrt{k/m} = i \omega_1 \quad (22)$$

essendo  $i$  l'unità immaginaria ed  $\omega_1$  la pulsazione propria del sistema.  
Applicando la trasformazione di Eulero per cui:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \cdot \sin b) \quad (23)$$

la (20) può essere riscritta come segue:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t \quad (24)$$

Nella (24)  $A$  e  $B$  sono costanti reali, definite come segue in relazione alle precedenti  $C_1$  e  $C_2$ :

$$A = C_1 + C_2; \quad B = i \cdot (C_1 - C_2)$$

Imponendo le condizioni al contorno  $x(0)=x_0$  e  $v(0)=v_0$ , la (24) assume la seguente espressione:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \quad (25)$$

Dalla (25), riportandone le componenti (vettori reciprocamente ortogonali, rotanti con velocità angolare  $\omega_1 t$ ) sul cosiddetto “piano di Argand” mostrato in Figura 3a, è altresì comprensibile il significato del vettore  $\rho$ , rappresentativo dell’ampiezza massima di oscillazione del sistema dinamico di partenza:

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_1}\right)^2}$$

e dell’angolo di fase  $\theta$ :

$$\theta = \arctg \frac{v_0}{\omega_1 x_0}$$

In relazione al vettore risultante la (25) può pertanto essere riscritta come segue:

$$x(t) = \rho \cos(\omega_1 t - \theta) \quad (26)$$

Dal grafico in Figura 3b, riprodotto la risposta dell’oscillatore semplice nella condizione di “oscillazioni libere”, soluzione della (19), vengono introdotte altre due grandezze di seguito definite come il periodo proprio di vibrazione del sistema,  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{f_1} \quad (27)$$

inteso corrispondente alla durata temporale di un ciclo armonico completo caratterizzante la risposta (Figura 3b), e la frequenza propria  $f_1$ , pari al suo inverso.

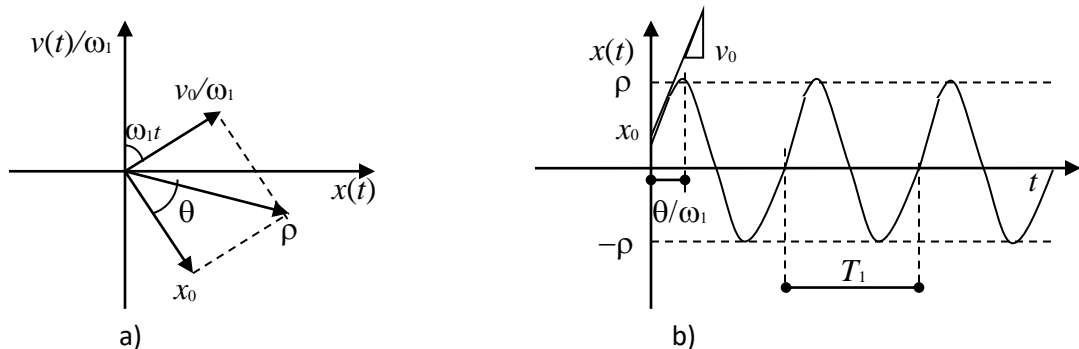


Figura 3 – a) Rappresentazione grafica della variazione della risposta nel piano di Argand;  
b) risposta di un sistema non smorzato nella condizione di oscillazioni libere

- Sistema smorzato nello stato di oscillazioni libere

Si consideri un sistema dinamico equivalente al precedente ma dotato di smorzamento; l'equazione del moto in assenza di forzanti esterne diventa:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (28)$$

La (28) è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, con equazione caratteristica così espressa:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (29)$$

Le soluzioni della (29) sono le seguenti:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (30)$$

Definendo come rapporto di smorzamento  $\xi$  il rapporto fra il coefficiente  $c$  di smorzamento viscoso caratterizzante il sistema e lo "smorzamento critico", inteso come quel valore della stessa costante  $c$  per il quale le radici dell'equazione caratteristica risultino reali e coincidenti:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_1} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (31)$$

in generale si possono distinguere tre differenti condizioni di smorzamento:

- 1) smorzamento critico ( $\xi = 1$ ; le radici sono reali e coincidenti);
- 2) sistema sovrasmorzato ( $\xi > 1$ ; le radici sono reali e distinte);
- 3) sistema sottosmorzato ( $\xi < 1$ ; le radici sono complesse coniugate).

In funzione di  $\xi$ , per casi reali di sistemi sottosmorzati, le (30) possono essere riformulate come segue:

$$s_{1,2} = \omega_1(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}) = -\xi\omega_1 \pm i\omega_{1d} \quad (32)$$



avendo indicato con  $\omega_{1d}$  la pulsazione propria del sistema smorzato, che a sua volta porta a definire il periodo proprio di vibrazione smorzato,  $T_{1d}$ , e la frequenza smorzata  $f_{1d}$ :

$$\omega_{1d} = \omega_1 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (33)$$

$$T_{1d} = \frac{T_1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (34)$$

$$f_{1d} = f_1 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (35)$$

La soluzione generale della (28) assume quindi la seguente espressione:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_1 t} (A \cdot \cos \omega_{1d} t + B \cdot \sin \omega_{1d} t) \quad (36)$$

ed imponendo le condizioni al contorno,  $x(0)=x_0$  e  $v(0)=v_0$ , diventa:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_1 t} \left( x_0 \cos \omega_{1d} t + \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d}} \sin \omega_{1d} t \right) \quad (37)$$

Dall'analisi delle componenti armoniche caratterizzanti la (37) sul piano di Argand (Figura 4a), la (37) può anche essere riformulata in funzione del vettore risultante:

$$x(t) = \rho \cdot e^{-\xi\omega_1 t} \cos(\omega_{1d} t - \theta) \quad (38)$$

essendo:

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d}} \right)^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d} x_0}$$

Tenendo conto della legge esponenziale decrescente che regola l'abbattimento delle massime ampiezze dei cicli successivi di risposta fino allo stato di quiete del sistema e che dipende dall'entità dello smorzamento, per gli oscillatori viscosi lineari come quello in esame, oltre a  $\xi$  può essere introdotto un ulteriore parametro di valutazione dello smorzamento, definito come "decremento logaritmico",  $\delta$ :

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x_n}{x_{n+N}} = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \approx 2\pi\xi \quad (39)$$

ottenuto valutando il logaritmo naturale del rapporto fra le ampiezze massime di due cicli successivi caratterizzanti la risposta nella fase di oscillazione libera. Nella (39) viene anche indicata la relazione che si può stabilire fra i due parametri  $\xi$  e  $\delta$ , approssimativamente valida solo per oscillatori semplici a viscosità lineare ed in presenza di bassi smorzamenti. A questo riguardo si osserva come essa sia ammissibile adottarla nel caso di analisi dinamica di strutture tradizionali alle quali sono generalmente attribuiti dei rapporti percentuali di smorzamento variabili fra il 2% ed il 5%.

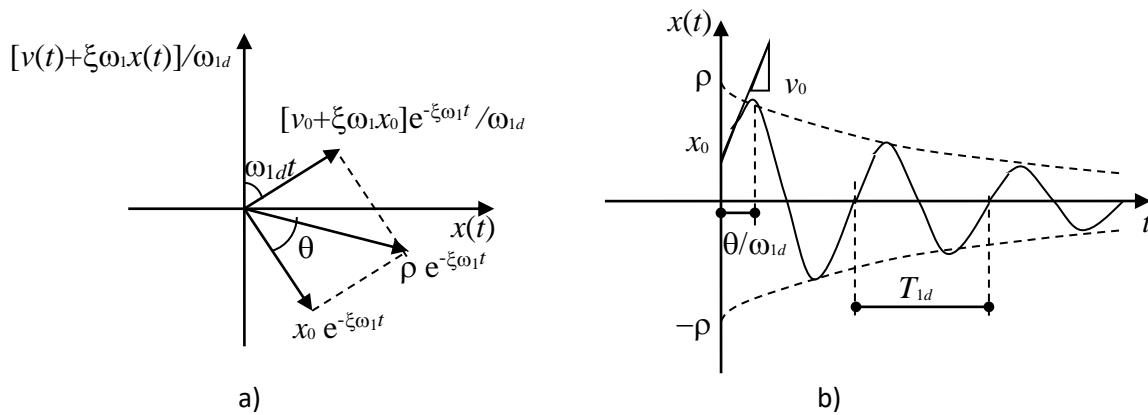


Figura 4 – a) Rappresentazione grafica della variazione della risposta di un sistema smorzato nel piano di Argand; b) risposta di un sistema smorzato nella condizione di oscillazioni libere