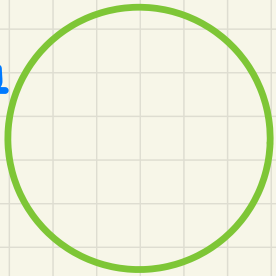
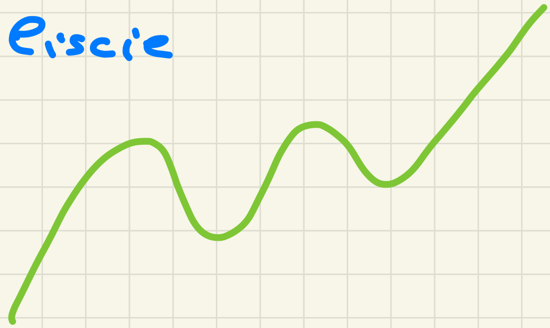
Varietà differenziabili

in dimensione 1 pensiamo alle curve lisce

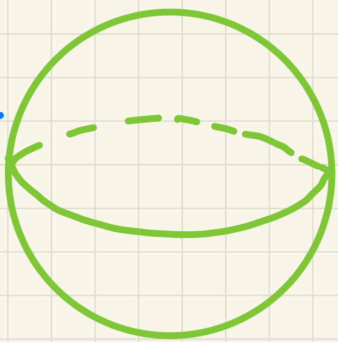
S^1

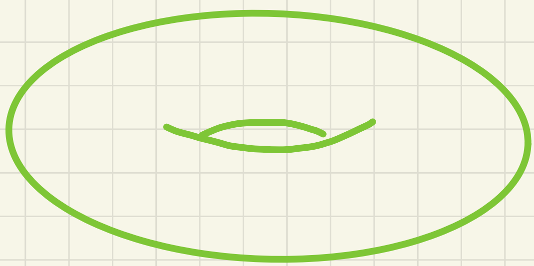


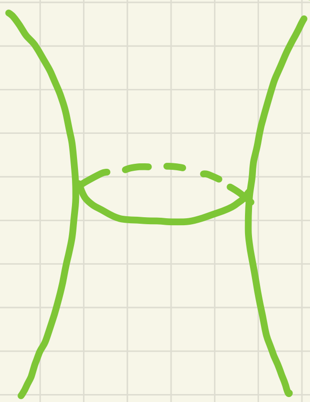


in dimensione 2 pensiamo alle superfici lisce

S^2

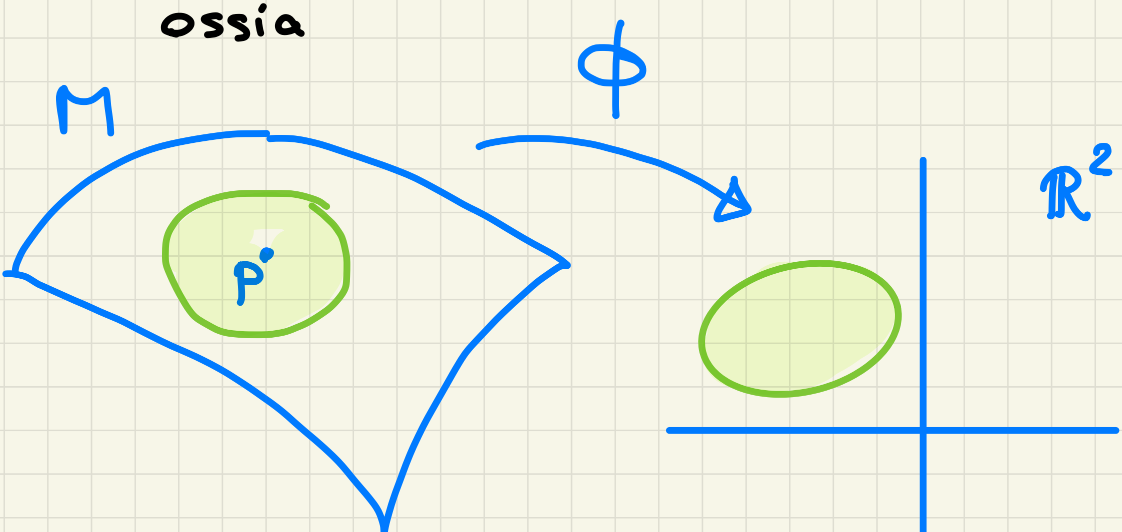






Def una variètà topologica è uno spazio topologico M tale che

- M è Hausdorff
- M ha una base numerabile di aperti
- M è localmente euclidea ossia



$\forall\, p \in M$ $\exists$ intorno U t.c. $p \in U$

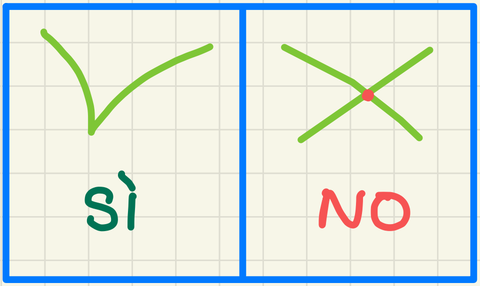
$\phi : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ϕ omeom, U' aperto

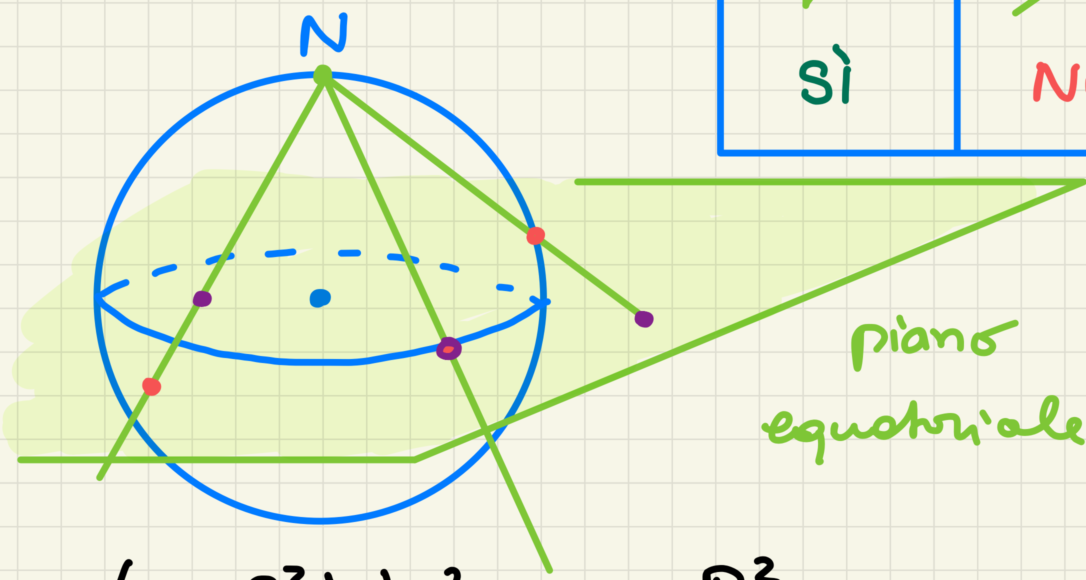
$n =$ dimensione di M

la coppia (U, ϕ) si dice CARTA

U è un intorno coordinato

(U, ϕ) è un sistema di coordinate locali



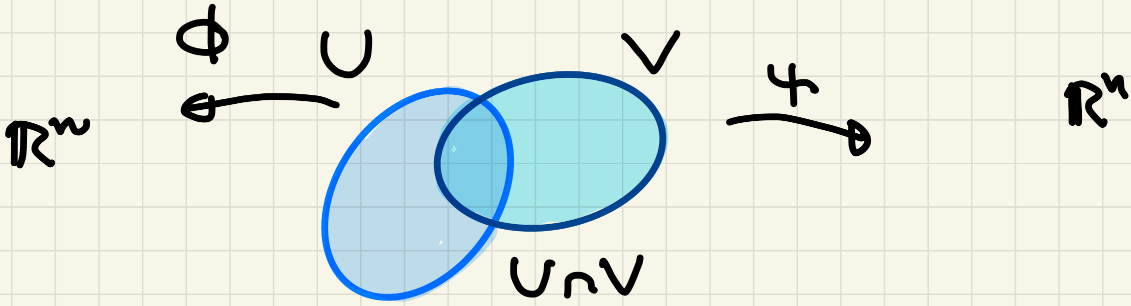


$\phi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ omeom.

↑ proiezione stereografica

due carte (U,ϕ) e (V,ψ)

sono C^∞-compatibili se



$\psi\circ\phi^{-1}: \phi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V)$ diffeo

$\phi\circ\psi^{-1}: \psi(U\cap V) \longrightarrow \phi(U\cap V)$ diffeo

diffeomorfismo fra due aperti di $\mathbb{R}^n$: applicazione biunivoca C^∞ con inversa C^∞.

$\uparrow$ cambiamento di carte

se $U\cap V=\emptyset$ si dicono comunque C^∞ compatibili

<u>**Def**</u> Un ATLANTE di M è una collezione di carte C^∞ compatibili $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ t.c.

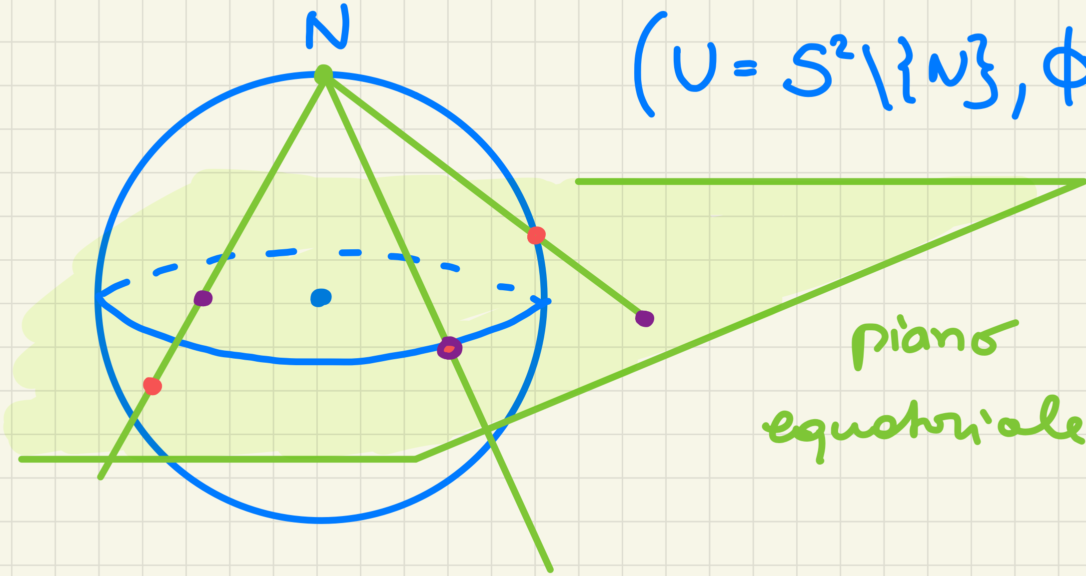
$$M=\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

Def Un atlante $\mathcal{A}$ si dice massimale se ogni carta compatibile con le carte di $\mathcal{A}$ è contenuta in $\mathcal{A}$.

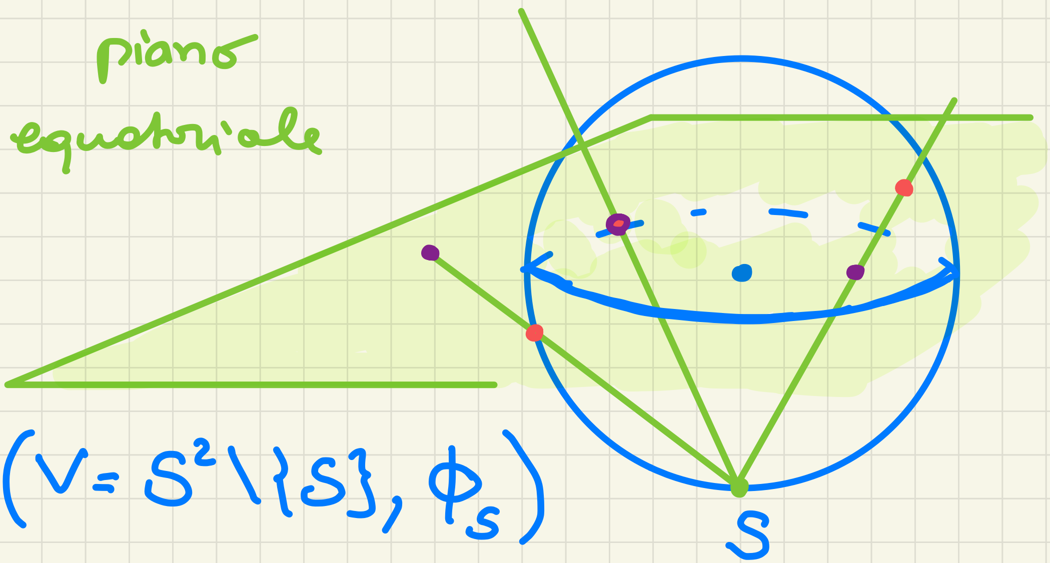
Def Sia M una varietà topologica. M è una varietà C^∞ o dotata di una STRUTTURA C^∞ se è dotata di un atlante massimale

NB Per dotare una varietà topologica di una struttura C^∞ è sufficiente dare un atlante. Infatti, dato un atlante, questo è contenuto in un UNICO atlante massimale.

argomento principale: se due carte sono compatibili con un atlante allora sono compatibili tra loro.



$$(U = S^2 \setminus \{N\}, \phi_N)$$



$$(V = S^2 \setminus \{S\}, \phi_S)$$

$$U \cap V = S^2 \setminus \{N, S\}$$

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow[\text{diffeo}]{} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Altri esempi:

- $\mathbb{R}^n$ una sola carta

- un aperto V di una varietà M

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlante di M

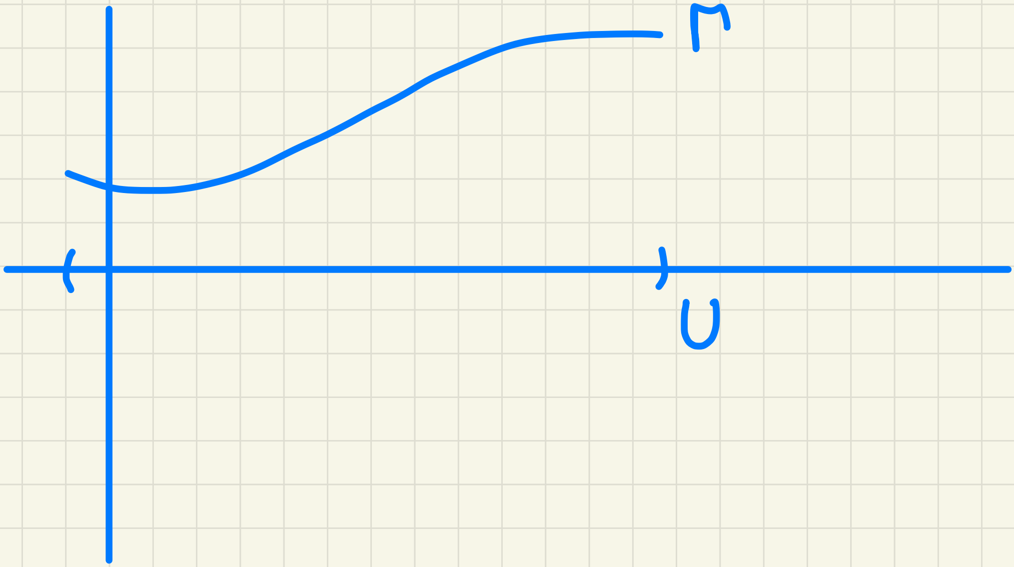
$\mathcal{A}_V = \{(U_\alpha \cap V, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap V})\}$

atlante di V

- Il grafico di una funzione C^∞, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\Gamma(f) = \{ (x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}^m \}$$

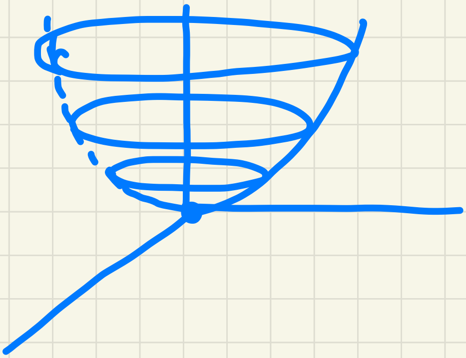


$$\phi : \Gamma(f) \longrightarrow U$$
$$(x, f(x)) \longmapsto x$$

$(\Gamma(f), \phi)$ basta una sola carta

Esempi di funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



$\Gamma(f)$ = paraboloide ellittico

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

$\Gamma(f)$ = paraboloide iperbolico

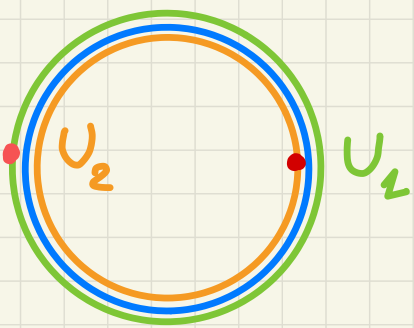
- $GL(n,\mathbb{R})$ aperto in $\mathbb{R}^{n^2}$

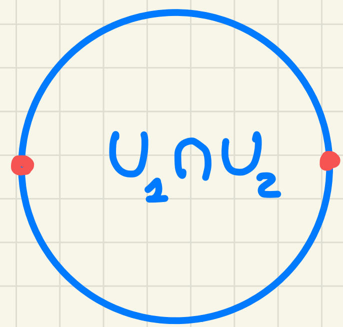
- $GL(n,\mathbb{C})$ aperto in $\mathbb{R}^{(2n)^2}$

- $S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

$U_1 = \{e^{it} \mid -\pi<t<\pi\}$ $\quad \phi_1(e^{it})=t$

$U_2 = \{e^{it} \mid 0<t<2\pi\}$ $\quad \phi_2(e^{it})=t$





$(-\pi,0)\cup(0,\pi)=\phi_1(U_1\cap U_2)$ $\qquad t \longmapsto t$

$(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)=\phi_2(U_1\cap U_2)$ $\qquad t \longmapsto t+2\pi$

- per esercizio scrivere le proiezioni stereografiche da N e da S e il cambiamento di carte.

- $$\mathbb{RP}^2 = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

$(x,y,z) \sim (x',y',z') \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
t.c. $(x',y',z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$U_1 = \{ [x,y,z] \mid x \neq 0 \}$ $\quad \phi_1([x,y,z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

$U_2 = \{ [x,y,z] \mid y \neq 0 \}$ $\quad \phi_2([x,y,z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$

$U_3 = \{ [x,y,z] \mid z \neq 0 \}$ $\quad \phi_3([x,y,z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$

Determinare $\phi_i(U_i)$, verificare che ϕ_i è un omeom. e determinare $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$

<u>Def</u> Sia M una varietà diff.

e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

f è C^∞ se $\forall\, p \in M$ $\exists$ carta (U, ϕ) tale che $p \in U$ e

$(f \circ \phi^{-1}) : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ è C^∞

Denotiamo

$$\boxed{C^\infty(M) = \{ f : M \to \mathbb{R} \quad C^\infty \}}$$

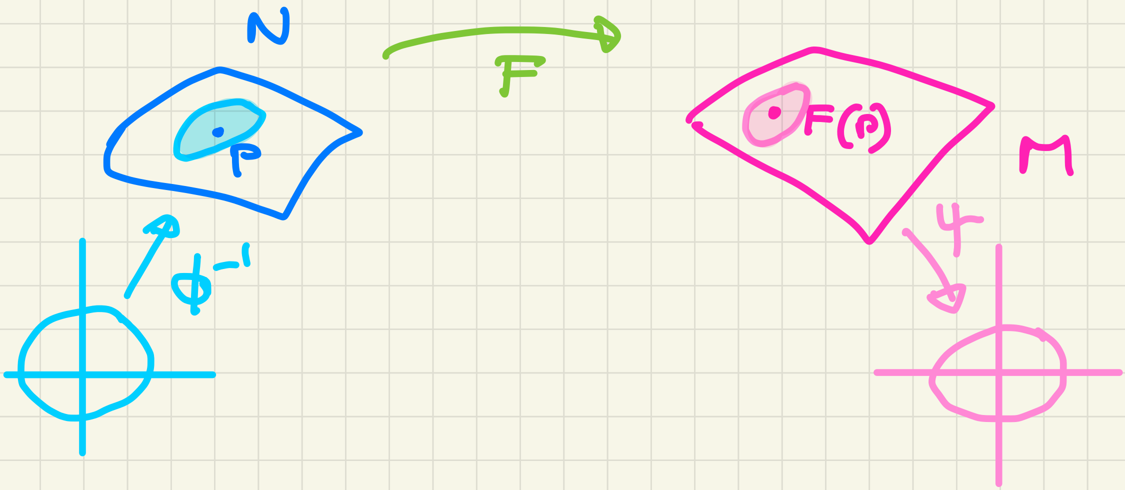
$C^\infty(M)$ è un ALGEBRA

Def Una applicazione

$$F : N^n \longrightarrow M^m \text{ è } C^\infty$$

se $\forall\, p \in N$ esiste un intorno (U, ϕ) di p e un intorno (V, ψ) di $F(p)$ t.c.

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} \text{ è } C^\infty$$



$F : N \longrightarrow M$ è un diffeomorfismo se è biunivoca e F ed F^{-1} sono C^∞.

Spazio tangente

Sia M una varietà diff.

sia $p \in M$

$C_p^\infty(M)$ = insieme dei germi di funzioni C^∞ su M a valori in $\mathbb{R}$

un germe è una classe di equivalenza di funzioni, f e g sono equivalenti se coincidono in un intorno di p.

$C_p^\infty(M)$ è un algebra

Una derivazione in P è una applicazione

$$D : C^\infty_p(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

$$D(f \cdot g) = (Df)\, g(p) + f(p)\, Dg$$

Def Un vettore TANGENTE in p ad M è una derivazione in p.

L'insieme delle derivazioni forma uno spazio vettoriale

$$\boxed{T_pM}$$

Cosa ha a che fare questa definizione con la nostra intuizione di spazio tangente?

Denotiamo con $(r^1, \ldots, r^n)$ le coordinate standard in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo una carta (U, ϕ):

denotiamo $x^i = r^i \circ \phi$ la i-esima componente di ϕ

$\phi = (x^1, \ldots, x^n)$

$x^i : U \to \mathbb{R}$ coordinate su U

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1})$$

$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ è una <u>derivazione</u>

quindi un vettore di T_pM

<u>Prop</u> $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$

è una base di T_pM

Curve su M

$c : (a,b) \longrightarrow M$ $\quad C^\infty$

è una curva liscia

c definisce una derivazione

in $c(t_0)$ nel modo seguente

$$c'(t_0)(f) \overset{def}{=\!=} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f \circ c)$$

sia $p \in M$ e siano c_1 e c_2

due curve t.c. $c_1(t_0) = c_2(t_0)$.

c_1 e c_2 sono <u>equivalenti</u> se

$$c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$$

Inoltre, date $c : (a,b) \longrightarrow M$

e data una carta

$$(U, (x^1, \ldots, x^n))$$

in un intorno di $c(t_0)$ abbiamo

$c^i = x^i \circ c$ scriviamo

$c^i(t) = x^i(c(t))$ si ha

$$\boxed{c'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}^i(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t_0)}}$$

verifica di

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}^i(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t_0)}$$

$$c'(t_0)(f) \overset{def}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f \circ c) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ c) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \phi^{-1})\Big|_{(\phi \circ c)(t_0)} \cdot \dot{c}^i(t_0) =$$

$$= \sum_{1}^{n} \dot{c}^i(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}_{c(t_0)}(f)$$

Prop $\forall$ $p \in M$ e $\forall$ $X_p \in T_pM$ esiste una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ t.c.

$$c(0) = p$$
$$c'(0) = X_p$$

quindi $X_p(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (f \circ c)$

possiamo interpretare un vettore tangente, ossia una derivazione, come una derivata direzionale, come classe di equivalenza di curve, come "vettore velocità" - vettore tangente a una curva.