Lezione n. 15: Limiti di funzioni di più variabili reali -parte 2-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è ... e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p... ffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finali... e viene rilasciato in uso agli ... le studentesse sotto licenza:

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è … e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p … ffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/03/2020

Limiti di funzioni di più variabili

- Per le funzioni reali di più variabili reali valgono teoremi analoghi a quelli già visti nel caso di una variabile reale. Con le opportune modifiche valgono infatti i seguenti risultati:

1. Teorema sulle operazioni tra limiti;
2. Teorema di unicità del limite;
3. Teorema della permanenza del segno;
4. Teorema dei carabinieri.

Limiti di funzioni di più variabili

- Per le funzioni reali di più variabili reali valgono teoremi analoghi a quelli già visti nel caso di una variabile reale. Con le opportune modifiche valgono infatti i seguenti risultati:

  1. Teorema sulle operazioni tra limiti;
  2. Teorema di unicità del limite;
  3. Teorema della permanenza del segno;
  4. Teorema dei Carabinieri.

- Diremo che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata (limitata superiormente, limitata inferiormente) se lo è la sua immagine. Si può provare che $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è limitata $\iff \exists\, M > 0$ tale che $|f(P)| \leq M \;\; \forall P \in A$.

Limiti di funzioni di più variabili

- Per le funzioni reali di più variabili reali valgono teoremi analoghi a quelli già visti nel caso di una variabile reale. Con le opportune modifiche valgono infatti i seguenti risultati:

  1. Teorema sulle operazioni tra limiti;
  2. Teorema di unicità del limite;
  3. Teorema della permanenza del segno;
  4. Teorema dei Carabinieri.

- Diremo che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata (limitata superiormente, limitata inferiormente) se lo è la sua immagine. Si può provare che $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è limitata $\Longleftrightarrow$ $\exists\, M > 0$ tale che $|f(P)| \leq M \;\; \forall P \in A$.

- <u>Corollario</u> (del Teorema dei Carabinieri).

  Siano f e g due funzioni reali definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che f sia limitata e che $g(P) \to 0$ per $P \to P_0$ (P_0 di accumulazione per A). Allora $\lim_{P \to P_0} f(P)\, g(P) = 0$.

Limiti di funzioni di più variabili

- Per le funzioni reali di più variabili reali valgono teoremi analoghi a quelli già visti nel caso di una variabile reale. Con le opportune modifiche valgono infatti i seguenti risultati:

  1. Teorema sulle operazioni tra limiti;
  2. Teorema di unicità del limite;
  3. Teorema della permanenza del segno;
  4. Teorema dei Carabinieri.

- Diremo che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata (limitata superiormente, limitata inferiormente) se lo è la sua immagine. Si può provare che $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è limitata $\Longleftrightarrow$ $\exists\, M > 0$ tale che $|f(P)| \leq M \ \forall P \in A$.

- Corollario (del Teorema dei Carabinieri).

  Siano f e g due funzioni reali definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che f sia limitata e che $g(P) \to 0$ per $P \to P_0$ (P_0 di accumulazione per A). Allora $\lim_{P \to P_0} f(P)\,g(P) = 0$.

  Dimostrazione

  visto che f è limitata $\Rightarrow$ $\exists\, M > 0$ tale che $|f(P)| < M \ \forall P \in A$. Si ha che: $0 \leq |f(P)\,g(P)| \leq M|g(P)|$ e visto che $M\,|g(P)| \to 0$ per $P \to P_0$, per il teorema dei Carabinieri ottengo $|f(P)\,g(P)| \to 0$ per $P \to P_0$

Di conseguenza $f(P)\, g(P) \to 0$ per $P \to P_0$. ∎

Di conseguente $f(P)\,g(P) \to 0$ per $P \to P_0$. ∎

Esempio

Usiamo il precedente Corollario per calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Proveremo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Osserviamo che $\boxed{\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)} = f(x,y)\,g(y).}$

Chiaramente

$g(y) \to 0$ per $y \to 0$

Di conseguenza $f(P)\,g(P) \to 0$ per $P \to P_0$. ∎

Esempio

Usiamo il precedente corollario per calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^2}$. Proveremo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^2} = 0$

Osserviamo che $\frac{x y^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x y}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)} = f(x,y)\, g(y)$.

Chiaramente $g(y) \to 0$ per $y \to 0$

Abbiamo già visto che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, quindi anche se $g(y) \to 0$ per $y \to 0$ in questo caso non usare, per esempio, il teorema sul prodotto dei limiti per concludere.

Di conseguenza $f(P)\,g(P) \to 0$ per $P \to P_0$. ∎

Esempio

Usiamo il precedente corollario per calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Proveremo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Osserviamo che $\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)} = f(x,y)\,g(y)$. Abbiamo già visto che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

Chiaramente $g(y) \to 0$ per $y \to 0$

quindi anche se $g(y) \to 0$ per $y \to 0$ in questo caso non usare, per esempio, il teorema sul prodotto dei limiti per concludere.

Tuttavia: $\boxed{|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \text{ è limitata}}$ e quindi per il corollario precedente so poi concludere che $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0}$ ∎

$(|x|-|y|)^2 \geq 0$

Di conseguente $f(P)\, g(P) \to 0$ per $P \to P_0$. ∎

Esempio

Usiamo il precedente corollario per calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^2}$. Proveremo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^2} = 0$

Osserviamo che $\frac{x y^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x y}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)} = f(x,y)\, g(y)$. Abbiamo già visto che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

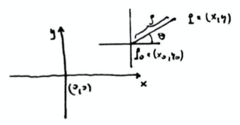
Chiaramente $g(y) \to 0$ per $y \to 0$

quindi anche se $g(y) \to 0$ per $y \to 0$ in questo caso non usare, per esempio, il teorema sul prodotto dei limiti per concludere.

Tuttavia: $|f(x,y)| = \frac{|x y|}{x^2+y^2} \underset{(|x|-|y|)^2 \geq 0}{\leq} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$ è limitata e quindi per il corollario precedente so poi concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^2} = 0$ ∎

Osservazione

Dato un punto $(x_0, y_0) = P_0 \in \mathbb{R}^2$, allora ogni punto $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ può essere rappresentato come segue $\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos(\theta), \\ y = y_0 + \rho \sin(\theta), \end{cases}$ dove $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ (Coordinate polari)

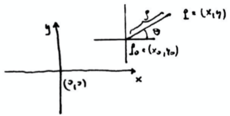


Usando la definizione di limite si può verificare che:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\rho\to 0}\ \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| f(x_0+\rho\cos(\theta),\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}(\theta)) - L \right| = 0 \qquad (I)$$



Usando la definizione di limite si può verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

$$\Longleftrightarrow$$

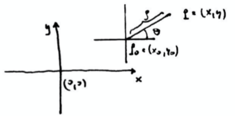
$$\lim_{\rho\to 0}\ \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| f(x_0+\rho\cos(\theta),\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}(\theta)) - L \right| = 0 \qquad \text{(I)}$$

La precedente osservazione si può riassumere nel seguente teorema

Teorema

Sia $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $P_0=(x_0,y_0)$ un punto di accumulazione per A. Allora vale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{\rho\to 0} f\left(x_0+\rho\cos(\theta),\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\right)=L \ \ \underline{\text{uniformemente rispetto a } \theta} \quad \text{(II)}$$



Usando la definizione di limite si può verificare che:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$\iff$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| f(x_0+\rho\cos(\theta),\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}(\theta)) - L \right| = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

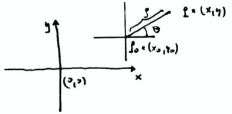
La precedente osservazione si può riassumere nel seguente teorema

<u>Teorema</u>

Sia $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $P_0=(x_0,y_0)$ un punto di accumulazione per A. Allora vale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \iff \lim_{\rho\to 0} f\big(x_0+\rho\cos(\theta),\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big) = L \ \ \underline{\text{uniformemente rispetto a } \theta} \quad (\mathrm{II})$$

- Ancora, il limite precedente (II) (che è equivalente al (I)) è uniforme in θ se $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ tale che per ogni $0<\rho<\delta$ e <u>per ogni $\theta\in[0,2\pi)$</u>, si ha $\left|f(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)-L\right|<\varepsilon$.



Usando la definizione di limite si può verificare che:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left| f(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}(\theta)) - L \right| = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

La precedente osservazione si può riassumere nel seguente teorema

<u>Teorema</u>

Sia $f: A\subseteq\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0=(x_0,y_0)$ un punto di accumulazione per A. Allora vale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \iff \lim_{\rho\to 0} f\left(x_0+\rho\cos(\theta),\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\right) = L$$ <u>uniformemente rispetto a θ</u> (II)

- Ancora, il limite precedente (II) (che è equivalente al (I)) è uniforme in θ se $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ tale che per ogni $0<\rho<\delta$ e <u>per ogni $\theta\in[0,2\pi]$</u>, si ha $\left|f(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - L\right| < \varepsilon$.

- <u>Osservazione</u>

Una condizione sufficiente a garantire che $\boxed{\lim_{\rho\to 0}\ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left| f(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - L \right| = 0}$

è mostrare che $\exists$ una funzione $g(\rho) \geq 0$ (che non dipende da θ) tale che:

1. $\left| f(x_0 + \rho \cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) - L \right| \leq g(\rho)$, per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$

e inoltre

2. $\lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$

è mostrare che $\exists$ una funzione $g(\rho) \geq 0$ (che non dipende da θ) tale che:

1. $\left| f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) - L \right| \leq g(\rho)$, per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$

e inoltre

2. $\lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$

Esempio

Proviamo che $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^2+3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{f(x,y)=} = 0}$. Infatti passando in coordinate polari: $\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}}$

è mostrare che $\exists$ una funzione $g(\rho) \geq 0$ (che non dipende da θ) tale che:

1. $\left| f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\,\text{sen}\,\theta) - L \right| \leq g(\rho)$, per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$

e inoltre

2. $\lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$

Esempio

Proviamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\text{sen}\,(x^2 + 3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f(x,y)=} = 0$. Infatti passando in coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

si ha che

$$\boxed{\begin{aligned} |f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)| &= \frac{|\text{sen}\,(\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\text{sen}^2\theta)|}{\rho} = \rho(\cos^2\theta + 3\,\text{sen}^2\theta)\frac{|\text{sen}\,(\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\text{sen}^2\theta)|}{\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\text{sen}^2\theta} \\ &\leq \rho(\underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1} + 3\underbrace{\text{sen}^2\theta}_{\leq 1}) \leq \underbrace{4\rho}_{=:g(\rho)} \end{aligned}}$$

è mostrare che $\exists$ una funzione $g(\rho) \geq 0$ (che non dipende da θ) tale che:

1. $\quad \left| f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) - L \right| \leq g(\rho)$, per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$

e inoltre

2. $\quad \lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$

Esempio

Proviamo che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^2+3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{f(x,y)=} = 0$. Infatti passando in coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

si ha che

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)| = \frac{|\operatorname{sen}(\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)|}{\rho} = \rho(\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta)\frac{|\operatorname{sen}(\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)|}{\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\leq \rho(\underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1} + 3\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{\leq 1}) \leq \underbrace{4\rho}_{=: g(\rho)}$$

abbiamo quindi che $|f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)| \leq g(\rho) = 4\rho$

e che $g(\rho) = 4\rho \to 0$ per $\rho \to 0$

quindi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ∎

Esempio

Consideriamo $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ e proviamo che tale limite } \exists \text{ e vale zero.}}$

Esempio

Consideriamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ e proviamo che tale limite $\exists$ e vale zero.

Come prima passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ e quindi otteniamo che:

$$\boxed{|f(x,y)| = |f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)| = \frac{\rho^3|\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta|}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\text{sen}^2\theta} = \rho\,|\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta| \le \underset{g(\rho)}{\underset{\shortparallel}{\rho}} \quad \text{e} \quad g(\rho) = \rho \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

Di conseguenza $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = 0$ uniformemente in θ

$$\Longleftrightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0} \qquad \blacksquare$$

Esempio

Consideriamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ e proviamo che tale limite $\exists$ e vale zero.

Come prima passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ e quindi otteniamo che:

$$|f(x,y)| = |f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)| = \frac{\rho^3|\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta|}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\text{sen}^2\theta} = \rho\,|\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta| \le \underset{g(\rho)}{\underset{\parallel}{\rho}} \quad \text{e} \quad g(\rho) = \rho \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Di conseguenza $\lim\limits_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = 0$ uniformemente in θ

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \blacksquare$$

Esempio

Il $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste. Infatti, se passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

allora $\boxed{f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = \dfrac{\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\rho^2} = \cos\theta\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \lim\limits_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = \cos\theta\,\text{sen}\,\theta}$

Esempio

Consideriamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ e proviamo che tale limite $\exists$ e vale zero.

Come prima passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ e quindi otteniamo che:

$$|f(x,y)| = |f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)| = \frac{\rho^3|\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta|}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\mathrm{sen}^2\theta} = \rho\,|\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta| \le \underset{g(\rho)}{\overset{}{\rho}} \quad \text{e} \quad g(\rho) = \rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

Di conseguenza $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$ uniformemente in θ

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \quad \blacksquare$$

Esempio

Il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste. Infatti, se passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

allora $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2} = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$

Poiché il $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$ dipende da $\theta \Rightarrow$ esso non può essere uniforme in θ e quindi possiamo concludere che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$. $\blacksquare$

Esempio

Consideriamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ e proviamo che tale limite $\exists$ e vale zero.

Come prima passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$ e quindi otteniamo che:

$$|f(x,y)| = |f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)| = \frac{\rho^3|\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\mathrm{sen}^2\vartheta} = \rho\,|\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta| \le \underset{g(\rho)}{\underset{\shortparallel}{\rho}} \quad \text{e} \quad g(\rho) = \rho \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Di conseguenza $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = 0$ uniformemente in θ

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

Esempio

Il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste. Infatti, se passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$

$= L$ numero reale, se fosse questo il limite $\Longrightarrow \left| f(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)) - L \right| = |\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) - L|$ impossibile $\underset{\rho\to 0}{\uparrow} 0$

allora $f(x,y) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \frac{\rho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\rho^2} = \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\theta$

Poiché il $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ dipende da $\theta \Rightarrow$ esso non può essere uniforme in θ e quindi possiamo concludere che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.