Lezione n. 16: Funzioni Continue

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è … e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p… ffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni
non sarà sempre omogenea, in dipendenza
dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è … e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p… ffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/03/2020

Continuità di una funzione di più variabili reali

- La continuità per una funzione di più variabili reali si definisce in maniera analoga a quanto fatto nel caso di una sola variabile reale.

Continuità di una funzione di più variabili reali

- La continuità per una funzione di più variabili reali si definisce in maniera analoga a quanto fatto nel caso di una sola variabile reale.

Definizione (di continuità in un punto)

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e dato $P_0 \in A$ diremo che f è continua in P_0 se P_0 è un punto isolato di A oppure, nel caso in cui P_0 sia un punto di accumulazione di A, se $f(P) \to f(P_0)$ per $P \to P_0$.

Continuità di una funzione di più variabili reali

- La continuità per una funzione di più variabili reali si definisce in maniera analoga a quanto fatto nel caso di una sola variabile reale.

Definizione (di continuità in un punto)

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e dato $P_0 \in A$ diremo che f è continua in P_0 se P_0 è un punto isolato di A oppure, nel caso in cui P_0 sia un punto di accumulazione di A, se $f(P) \to f(P_0)$ per $P \to P_0$.

In ogni caso, f è continua in P_0 se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\forall P \in A$ e $\|P - P_0\| < \delta$ allora segue che $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$.

Continuità di una funzione di più variabili reali

- La continuità per una funzione di più variabili reali si definisce in maniera analoga a quanto fatto nel caso di una sola variabile reale.

Definizione (di continuità in un punto)

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e dato $P_0 \in A$ diremo che f è continua in P_0 se P_0 è un punto isolato di A oppure, nel caso in cui P_0 sia un punto di accumulazione di A, se $f(P) \to f(P_0)$ per $P \to P_0$.

In ogni caso, f è continua in P_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall P \in A$ e $\|P - P_0\| < \delta$ allora segue che $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$.

- Analogamente, usando il teorema di collegamento tra limiti di funzioni e limiti di successioni si ha:

Definizione (di continuità in un punto con le successioni)

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e dato $P_0 \in A$ di accumulazione per A diremo che f è continua in P_0 se $\forall$ successione $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in A e tale che $P_n \to P_0$, per $n \to +\infty$, allora risulta che $f(P_n) \to f(P_0)$ per $n \to +\infty$.

In base alla precedente definizione, in $\mathbb{R}^2$, si ha che $f(x,y)$ definita su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è continua in $P_0 = (x_0, y_0) \in A \iff \forall$ successione $(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x_0, y_0)$ allora $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0, y_0)$

In base alla precedente definizione, in $\mathbb{R}^2$, si ha che $f(x,y)$ definita su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è continua in $P_0 = (x_0, y_0) \in A \iff \forall$ successione $(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x_0, y_0)$ allora $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0, y_0)$

Esempio

La funzione $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ è continua in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Infatti comunque consideriamo due successioni $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$, dobbiamo provare che $\operatorname{sen}(x_n y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{sen}(x_0 y_0)$.

Questa relazione segue subito dal fatto che posto $z_n = x_n y_n$ (una nuova successione)

In base alla precedente definizione, in $\mathbb{R}^2$, si ha che $f(x,y)$ definita su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è continua in $P_0 = (x_0, y_0) \in A \iff \forall$ successione $(x_n, y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (x_0, y_0)$ allora $f(x_n, y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_0, y_0)$

<u>Esempio</u>

La funzione $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ è continua in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Infatti comunque consideriamo due successioni $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$, dobbiamo provare che $\operatorname{sen}(x_n y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sen}(x_0 y_0)$.

Questa relazione segue subito dal fatto che posto $z_n = x_n y_n$ (una nuova successione)

allora visto che $x_n y_n \to x_0 y_0 =: z_0$ si ha subito che $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(z_n) = z_0$ come sappiamo già dalla teoria delle funzioni di una variabile reale.

In base alla precedente definizione, in $\mathbb{R}^2$, si ha che $f(x,y)$ definita su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è continua in $P_0 = (x_0, y_0) \in A \iff \forall$ successione $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x_0, y_0)$ allora $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0, y_0)$

Esempio

La funzione $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ è continua in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Infatti comunque consideriamo due successioni $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$, dobbiamo provare che $\operatorname{sen}(x_n y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{sen}(x_0 y_0)$.

Questa relazione segue subito dal fatto che posto $z_n = x_n y_n$ (una nuova successione) allora visto che $x_n y_n \to x_0 y_0 =: z_0$ si ha subito che $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(z_n) = z_0$ come sappiamo già dalla teoria delle funzioni di una variabile reale.

Esempio

Consideriamo la funzione di due variabili $f(x,y)$ definita come segue $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tale funzione è continua in $(0,0)$.

In base alla precedente definizione, in $\mathbb{R}^2$, si ha che $f(x,y)$ definita su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è continua in $P_0 = (x_0, y_0) \in A \iff \forall$ successione $(x_n, y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (x_0, y_0)$ allora $f(x_n, y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_0, y_0)$

Esempio

La funzione $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ è continua in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Infatti comunque consideriamo due successioni $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$, dobbiamo provare che $\operatorname{sen}(x_n y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sen}(x_0 y_0)$.

Questa relazione segue subito dal fatto che posto $z_n = x_n y_n$ (una nuova successione) allora visto che $x_n y_n \to x_0 y_0 =: z_0$ si ha subito che $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(z_n) = z_0$ come sappiamo già dalla teoria delle funzioni di una variabile reale.

Esempio

Consideriamo la funzione di due variabili $f(x,y)$ definita come segue $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tale funzione è continua in $(0,0)$.

Infatti, prese due successioni $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ dobbiamo provare che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x_n^2 + y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} = 1.$$

Ma questo fatto segue subito ponendo $z_n = x_n^2 + y_n^2 \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

e ricordando che $\frac{\operatorname{sen}(2_n)}{2_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ come provato per le funzioni di una variabile reale. ∎

e ricordando che $\dfrac{\operatorname{sen}(z_n)}{z_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ come provato per le funzioni di una variabile reale. ∎

Abbiamo i seguenti risultati per le funzioni continue:

- <u>Teorema</u> (di continuità delle funzioni combinate)

  Se una funzione reale di una o più variabili reali è ottenuta combinando funzioni continue mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione, allora è continua.

e ricordando che $\frac{\operatorname{sen}(z_n)}{z_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ come provato per le funzioni di una variabile reale. ■

Abbiamo i seguenti risultati per le funzioni continue:

- Teorema (di continuità delle funzioni combinate)

  Se una funzione reale di una o più variabili reali è ottenuta combinando funzioni continue mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione, allora è continua.

- Come conseguenza del teorema precedente si deduce che i monomi di due variabili del tipo $ax^k y^\ell$, $a \in \mathbb{R}$, k, ℓ interi non negativi, sono funzioni continue. Allora anche i polinomi di due variabili (essendo somme di monomi) sono funzioni continue e sono continue anche le funzioni razionali (ovvero i rapporti di polinomi).

e ricordando che $\frac{\operatorname{sen}(z_n)}{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ come provato per le funzioni di una variabile reale. ∎

Abbiamo i seguenti risultati per le funzioni continue:

- <u>Teorema</u> (di continuità delle funzioni combinate)

  Se una funzione reale di una o più variabili reali è ottenuta combinando funzioni continue mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione, allora è continua.

- Come conseguenza del teorema precedente si deduce che i monomi di due variabili del tipo ax^ky^l $a \in \mathbb{R}$, k, l interi non negativi, sono funzioni continue. Allora anche i polinomi di due variabili (essendo somme di monomi) sono funzioni continue e sono continue anche le funzioni razionali (ovvero i rapporti di polinomi).

- <u>Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^n$</u>

  Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un sottoinsieme chiuso e limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora f ammette minimo e massimo assoluti in A.

e ricordando che $\frac{\operatorname{sen}(z_n)}{z_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ come provato per le funzioni di una variabile reale. ∎

Abbiamo i seguenti risultati per le funzioni continue:

- <u>Teorema</u> (di continuità delle funzioni combinate)

  Se una funzione reale di una o più variabili reali è ottenuta combinando funzioni continue mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione, allora è continua.

- Come conseguenza del teorema precedente si deduce che i monomi di due variabili del tipo $ax^k y^l$ $a \in \mathbb{R}$, k, l interi non negativi, sono funzioni continue. Allora anche i polinomi di due variabili (essendo somme di monomi) sono funzioni continue e sono continue anche le funzioni razionali (ovvero i rapporti di polinomi).

- <u>Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^n$</u>

  Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un sottoinsieme chiuso e limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
  Allora f ammette minimo e massimo assoluti in A.

- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; un punto $P_1 \in A$ si dice punto di massimo assoluto per la funzione se, $\forall P \in A$, si ha che $f(P) \leq f(P_1)$.
- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; un punto $P_2 \in A$ si dice di minimo assoluto per f se, $\forall P \in A$, si ha che $f(P) \geq f(P_2)$

<u>Teorema</u> (di Bolzano)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e A un insieme connesso. Allora l'immagine $f(A)$ della funzione è un intervallo.

Teorema (di Bolzano)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e A un insieme connesso. Allora l'immagine $f(A)$ della funzione è un intervallo.

Abbiamo, come caso particolare del Teorema di Bolzano, la seguente versione del Teorema degli zeri per le funzioni di più variabili.

Teorema (degli zeri)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia A un insieme aperto connesso. Se esistono due punti $P_1, P_2 \in A$ tali che $f(P_1) < 0$ e $f(P_2) > 0$, allora $\exists$ un punto $p^* \in A$ tale che $f(p^*) = 0$.

Teorema (di Bolzano)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e A un insieme connesso. Allora l'immagine $f(A)$ della funzione è un intervallo.

Abbiamo, come caso particolare del Teorema di Bolzano, la seguente versione del Teorema degli zeri per le funzioni di più variabili.

Teorema (degli zeri)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia A un insieme aperto connesso. Se esistono due punti $P_1, P_2 \in A$ tali che $f(P_1) < 0$ e $f(P_2) > 0$, allora $\exists$ un punto $P^* \in A$ tale che $f(P^*) = 0$.

- Come nel caso delle funzioni di una variabile reale, anche per le funzioni di più variabili si possono definire i punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo:

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $P_0 \in A$. Il punto P_0 si dice punto di massimo relativo (di minimo relativo) per la funzione f se $\exists$ un intorno $B_\delta(P_0)$ tale che $\forall P \in A \cap B_\delta(P_0)$, $\delta > 0$, si ha che:

$$f(P) \leq f(P_0) \quad (\text{rispettivamente } f(P) \geq f(P_0))$$

Teorema (di Bolzano)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e A un insieme connesso. Allora l'immagine $f(A)$ della funzione è un intervallo.

Abbiamo, come caso particolare del Teorema di Bolzano, la seguente versione del Teorema degli zeri per le funzioni di più variabili.

Teorema (degli zeri)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia A un insieme aperto connesso . Se esistono due punti $P_1, P_2 \in A$ tali che $f(P_1) < 0$ e $f(P_2) > 0$, allora $\exists$ un punto $P^* \in A$ tale che $f(P^*) = 0$.

· Come nel caso delle funzioni di una variabile reale, anche per le funzioni di più variabili si possono definire i punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo:

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $P_0 \in A$. Il punto P_0 si dice punto di massimo relativo (di minimo relativo) per la funzione f se $\exists$ un intorno $B_\delta(P_0)$ tale che $\forall P \in A \cap B_\delta(P_0)$, $\delta > 0$, si ha che:

$$f(P) \leq f(P_0) \quad \left(\text{rispettivamente } f(P) \geq f(P_0)\right)$$

·Osserviamo che un punto di massimo (di minimo) assoluto è anche un punto di massimo (di minimo) relativo.