Lezione n. 16: Funzioni Continue

Lezione n. 16: Funzioni Continue

Luca Bisconti



Il presente contenuto è distanza resasi necessarie pe

Il contenuto ha una finali

Disclaimer

e alle esigenze di didattica a ffusione del virus COVID-19.

e viene rilasciato in uso agli le studentesse sotto licenza: Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti



Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Il presente contenuto è distanza resasi necessarie pe

Il contenuto ha una finali

Disclaimer

e alle esigenze di didattica a ffusione del virus COVID-19.

e viene rilasciato in uso agli le studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Continuité à une fun liene de più renistili resti

· La Continuità per una fourione De più saristili reali si bifinisa in unaviere analoga a grante follo nel 1650 di une sola variabile reale.

Continuité à une fou 2000 de più renistili resti

· La Continuità per una fourione De più variabili reali si definisa in maniere analoga a quente felto nel seso di une sole variabile reale.

Depinitione (do Contravità in un punto)

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ e data $p. \in A$ d'anno cle $f \in Gutinue$ in $Po Se Po è un punto isolete do A oppose, nel caso in cui Po Sie un punto do accounclosione di A, Se <math>f(Y) \longrightarrow f(Po)$ pu $P \to fo$.

Continuité à une four 20 me de più veristili rezli

· La Continuità per una fourione De più socialiti reali si definisa in meniere enaloge a quente felto nel aso di una sola verizbila reale.

Definitione (do Continuità in un punto)

Date $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e date $p \in A$ d'ans cle $f \in Gutinve$ in Po se $Po \in Vu$ pour lo isolate de A oppose, and asso in Cui Po sie un pour le accounclesses di A, se $f(P) \to f(Po)$ for $P \to fo$.

In ognitieso, f è continue in 10 ce \forall E>>> 3 6>>> tale the \forall PEA e ||P-Y-N|<6ollon segue the $|f(P)-f(P_0)|<\epsilon$.

Continuità do une fun 2000 de più venisbili rezli

· La Continuità per una fourione De più variabili reali si definisa in unaviere analoga a grante folto nel saso di une sola variabile reale.

Depinitione (do Continuità in un pourbo)

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $p: \in A$ divers cle $f \in Gutinue$ in Po see Po e un punto isolate d : A oppose, and asso in an Po sie un punto d : A see $f(P) \longrightarrow f(Po)$ $pm : P \longrightarrow f(Po)$.

In ogni 650, f à Guturus in 10 se \forall E>>> \exists \$>> tale the \forall YEA e $||Y-Y_0||<\delta$ ollow segue the $|f(Y)-f(G_0)|<\epsilon$.

. Aualogemente, viendo il teoreme De Glegemento tre limiti di busioni e limiti di successioni si he:

Dekinizione (di continuità in un punto con le successioni)

Deta $f:A \le N^n \to N$ a late $Y : \in A$ is accompletione you A directed of e^* Gentiume in R successione $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in A a talk the $P_n \to P_n$, you $n \to \infty$, allow visults the $f(Y_n) \to f(Y_n) \to f(Y_n)$ for $y \to \infty$.

In bett alle petrolende blinicione, in IRL, in he the $f(x_{13})$ belief to $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e' ontime in $P_0 = (x_{13}) \in A$ (a) $\forall S$ occassione $(x_{11}, y_{12}) \rightarrow (x_{13}, y_{13})$ ellere $f(x_{11}, y_{12}) \rightarrow f(x_{13}, y_{13})$

In beth sile preciolende blinicione, in 18th, in he the f(x13) labite to A sille e' ontime

In 10 = (x170) e A (a) & Successione (x1170) -> (x170) ellere f(x1170) -> f(x170)

1-> +0

Esempio

Le funtione f(x,y) = sen(xy) è contine in ogni put $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^k$. Intelli comunque consisterizans due successioni $x_{11} \to x_0 = j_{11} \to j_0$, debiens proven che $sen(x_1,y_0) \to sen(x_0,y_0)$. Queste relazione se que sult to $sen(x_0,y_0) \to sen(x_0,y_0)$.

In base alle preciolende blinicione, in $11/L^1$ is he the $f(x_{13})$ labite to $A \subseteq 11/L^2$ e' Gutina In $1/L = (x_{13}) \in A \subseteq 1$ $A \subseteq 11/L^2$ $A \subseteq 11/L^2$ A

Esempio

Le funtione $f(x,y) = \sin(xy)$ è contine in ogni purt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^d$. Intellé comunque considerismo due successioni $\times x_0 \to x_0 = J_0 \to y_0$, debieno proven cle sen $(x_0,y_0) \to \sin(x_0,y_0)$.

Queste relazione se que cutit del fatto cle posto $Z_0 = X_0 \cdot Y_0$ (une mode successione)

other vists de $x_{1}y_{1} \rightarrow x_{1}$ =: 20 si la soliti de $\lim_{n \to \infty} sen(E_{n}) = E_{0}$ Game separeno già delle teorie dele purasoni di une veriatile reale.

In beth alle persolande blinicione, in IKL, in he cle $f(x_{17})$ labite to $A \subseteq IK^2$ e' ontime I'm $I' = (x_{17}) \in A \subseteq A \subseteq A$ Succession $(x_{117}) \to (x_{170})$ ellere $f(x_{117}) \to f(x_{1170})$

Esempio

Le funcione $f(x,y) = \sin(xy)$ è contine in ogni put $(x_1,y_0) \in \mathbb{R}^n$. In falti comunque consisterismo due successioni $x_1 \to x_0$ e $y_1 \to y_0$, debiamo proven cle sun $(x_1,y_0) \to \sin(x_2,y_0)$. Aveste relazione se que cutit del totto cle posto $z_1 = x_0$ yu (une more successione) oltre vieto de $x_1, y_1 \to x_1 = z_0$ si le soliit cle $x_1, x_2 \to x_3 \to x_4 = z_0$ come se prenuo $y_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_4$ de soliit cle $x_1, x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_4$ on $x_1, x_2 \to x_4 \to x_4$.

Esunpia

Consideration le pursone de le venichili f(x,y) de printe Gue regue $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \in (x,y) \in (x,y) \end{cases}$ Tale pur haue à contrare in (0,0).

In been alle precadende blinicione, in 18th, in he the f(x13) belief to A & 18th a Continue

To 10 = (x1,70) & A (=) & Successione (x1,171) -> (x1,70) ellere f(x1,71) -> f(x1,70)

Esempio

Le furière $f(x,y) = \sin(xy)$ è contine in ogni put $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^k$. Inhalti comunque consisterizano due successioni $x_{11} \rightarrow x_0 = y_{11} \rightarrow y_0$, debieno proven che successioni $x_{11} \rightarrow x_0 = y_{11} \rightarrow y_0$.

Queste relazione se que colita del fotto che posto $z_{11} = x_{11} y_{11}$ (une more successione)

ollere victo de xmyn → x jo =: 20 si la solito de lim sen(zu) = 20 cme saprieno giè delle terrie delle pursoni di une verzhile rosle.

Esunpe

Consideration le pursone 2 Le veriebili f(x,y) de printe Gue regne $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sec(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (y) \end{cases}$ Tale pur lique è continue in (0,0).

Inhthi, prece due successioni xu->0 a ju->0 debieno persone de:

lim ser (xu + 4xu) = . (He questo petto segue subito poucemb 2u = xu + yu ->0 peu u->+0)
u->+00 xu + yu

Abbieno i seguenti visulteti pur la fonzioni continue:

· Teseme (de contravità delle fouzioni combinate)

Se une fouzione reale le une o più veriebili vedi è attenute combinando fouzioni contrave

medienti operazioni le somme, produtto, queiante e composizione, ellere à continue.

Abbieno i seguenti visulteti pur le fouzioni continue:

· Tesame (de Continuità delle funzioni combinate)

** une funzione reale li une o più variabili vedi è attempte combinando funzioni continue
medianti operazioni li somme, produlto, quicionte e compesizione, allere à continue.

Come consignante del teoreme precolecte si beoluce cle i monomi di de verestili del tipo exige 2 EM, K, L'interi non negativi, sono funcioni continue. Allor oncle i polinomi di die verestilo (essendo somme di amonomi) sono funcioni continue e sono continue encle le funcioni rezionali (ovvero i reproti de polinomi).

Abbieno i sequenti visultati pur la fonzioni Continue:

- · Tesrene (de continuità lille fouzioni combinate)
 - se une fundone reale le une o più veriabili verli è attenute combinando fursioni Continue medienti operacioni le somme, prodotto, quicionte e composizione, eller à continue.
- · Come conseguenze del teoreme precedente si beoliva cle i monomi di de versibili del tipo exige 2 EM, Kil interi usu negativi, sono funcioni continue. Allor oncle i polinomi di die versibili (essendo somme di monomi) sono funcioni continue e sono continue encle le funzioni rezionali (ovvero i respecti de polinomi).
- · Teorene di Weierstress in IR^M

 Sie f: A = 18^M → 18, une pur sione Cutimue in un sottoinsienne chiuso e limiteta A a 18^M.

 Alloa f emmette minimo e unessimo essiluti in A.

Abbieno i seguenti visulteti pur le fonzioni continue:

- · Tearence (La continuità lille funzioni combinate)
 - Se une funcione reale Li une o più venistili veali è attenute combinando funcioni Continue medienti openscioni li somme, prosblto, queionte e composizione, ellere è Continue.
- · Come conseguenze de teoreme precedente si beduce cle i monomi di de verishili del tipo extyle 2 Ell, Kil interimon negativi, sono frazioni continue. Allon oncle i polinomi di de verishilu (essendo somme di monomi) sono francioni continue e sono continue encle le frazioni vezionali (ovvero i reproti de polinomi).
- · Teorene d' Weierstress in IR ... Sie f: A ⊆ 18 → M une pou zone continue in un sottoinsière chioso e limitets A ∈ 18 ... Alba f emmette minimo e unessimo essoluti in A.
- · Sic f: A = 18th -> 16; un pout fie A si dice push dismessione esselute per la tourisme su, y pe A, si he de f(p) & f(x). · Sic f: A = 18th -> 18; un pout fie A si die di minimo esselute per f su, y pe A, si he de f(m) ≥ f(c)

Teoreme (Li Bolzano)

Sie $f:A \circ M \longrightarrow |R|$ une furtisme combinue e A un insieme comesso. Allore l'immegine f(A) delle funcione è un intervallo.

Tweme (Li Bolzano)

Sie $f:A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow |K|$ une furtione continue e A un insieme concesso. Allore l'immegine f(A) delle furtione è un interallo.

Abbieno, come an protecture del Teorema di Bolaria, la caguante versione del Teorema Legli Zeri per le funcioni da più veriabili.

Teoreme (legli zen)

Sie $f:A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une furxione entinue a sie A un insieme aperto connesso. Sa assistous due funt: $f:A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ to $f:A \subseteq \mathbb{R}^n$ to $f:A \subseteq \mathbb{R}^n$ to $f:A \subseteq \mathbb{R}^n$ to $f:A \subseteq \mathbb{R}^n$

Teoreme (Li Bolzano)

Sie $f:A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow |K|$ une furtione continue e A un insieme concesso. Allore l'immegine f(A) delle furtione è un interallo.

Abbiemo, come an protective del Teoreme di Bolerio, le cayonete versione del Teoreme leghi Zeri per le funcioni do più verishili.

Teoreme (legli zen)

Sie $f: A \subseteq \mathbb{R}^L \longrightarrow \mathbb{N}$ une furxione entinue a sie A un insieme aperto connesso. Se assistant due formation of $f: A \subseteq \mathbb{R}^L \longrightarrow \mathbb{N}$ the characteristic of $f(P^n) = 0$.

· Come med 650 delle fundioni di una verishile reale, sucle per le funzioni di più verishili si possono definire i punti di massimo reletivo e i punti di minimo reletivo:

Sie f: Ask -> IR a sie r. e.A. Il pouto p. si Loa pout L' marrimo relativo (diminimo relativo) per la fourisme f la 3 un instrumo Bg(a) tale cle 4 pe An Bg(a), soo, si he cle:

f(P) & f(Po) (vispetivemente f(P) > f(ro))

Twame (Li Bolzeno)

Sie $f:A \subseteq M^k \longrightarrow M$ the fraktone continue e A un insteme concesso. Allore l'immajine f(A) delle fraktone è un interallo.

Abbiemo, come un proticione del Teoresse di Bolzero, la saguente versione del Teoresse Lagli Zeri per le funzioni do più verishili.

Teoreme (degli zen)

Sie $f: A \le |R^k-> |R|$ une furxione entinue a sie A un insieme aperto connesso. Se assistano due ponti $P_1, P_2 \in A$ to the $f(P_1) < 0$ a $f(P_2) > 0$, allow \exists un ponto $p^* \in A$ to the $f(P^*) = 0$.

· Come med loso delle fundioni di una verishila reale, sucle per la funzioni do più verishili si possuo definire i punti do massimo reletivo e i punti di minimo reletivo:

Sie f: Askt -> IR e sie 1. E A. Il pouto p. si ba pont di massimo relativo (diminimo relativo) per la foursone f la 3 un intorno Bg(a) tala cla 4 re An Bg(a), soo, si ha cla:

f(P) & f(Po) (rispetivemente f(P) & f(Po))

Osservieno che un purb li massimo (li minimo) assoluto e' enche un purto di massimo (li minimo) relativo.