Normalizzazione delle solu. fondamentali

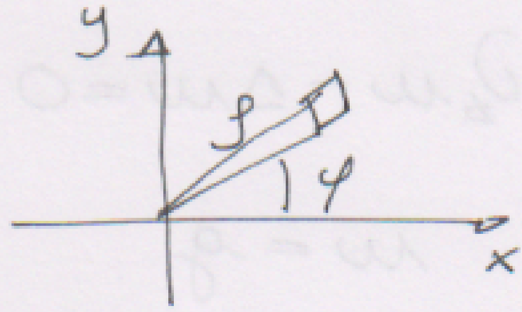
Si ha $$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\bar{x},t)\, dV(\bar{x}) = 1 \quad *$$

Utilizziamo $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (1)$$

Verifichiamo (1)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy =$$



coord. polari $$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \overset{u=\rho^2}{=} \frac{2\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi$$

Verifichiamo *

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x,t)\, dV(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dV(x) =$$

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\sum_i x_i^2}{4t}} dx_1 \dots dx_i =$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} dx_i = \qquad x_i = y_i 2\sqrt{t}$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \prod_i^n 2t^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y_i^2} dy}_{= \sqrt{\pi}} = 1$$

Soluzione del problema al valore iniziale

Cerchiamo una soluzione del seguente problema di Cauchy (Eq. calore omogenea)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

In maniera simile al prob. di Poisson, verifichiamo che la soluzione può essere scritta come

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\bar{x}-\bar{y}, t)\, g(\bar{y})\, d\bar{y} =$$

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int e^{-\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^2}{t4}} g(\bar{y})\, dV(\bar{y})$$

Dimostriamo i seguenti punti: data $g \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

1) $t > 0 \Rightarrow \quad \partial_t u - \Delta u = 0$

2) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,t) \to (x_0,0) \\ t>0}} u(x,t) = g(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

dove $\displaystyle u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dV(y)$

Punto 1) Verifichiamo l'esistenza delle derivate di u come abbiamo fatto per il prob. Poisson.

Per semplicità prendiamo $n = 1$ (estensione immediata al caso generale)

Calcolo $\displaystyle \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x-y+\varepsilon) - \Phi(x-y)}{\varepsilon}\, g(y)\, dy$

chiamo $s = x - y$

$$\frac{\Phi(s+\varepsilon) - \Phi(s)}{\varepsilon} = \cancel{\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}} \; \frac{e^{-(s+\varepsilon)^2} - e^{-s^2}}{\varepsilon} = \text{Th. di Lagrange}$$

$$= \frac{d}{ds} e^{-s^2} \Big|_{\xi \in [s, s+\varepsilon)} = -2\xi e^{-\xi^2}$$

Stimiamo $\displaystyle \left| \frac{\Phi(x-y+\varepsilon) - \Phi(x-y)}{\varepsilon}\, g(y) \right| \le \|g\|_{L^\infty}\, 2|\xi| e^{-\xi^2} \Big|_{\xi \in [x-y,\, x-y+\varepsilon)}$

$$\|g\|_{L^\infty} \, 2\,|x-y+\varepsilon|\, e^{-\frac{(x-y)^2}{\varepsilon}} = h(x,y)$$

Notiamo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h|\,dy < \infty$

Quindi, presa una sequenza $\varepsilon_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(x+\varepsilon_n)-u(x)}{\varepsilon_n} = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x,y)\,dy$$

con $h_n = \dfrac{\Psi(x-y+\varepsilon_n)-\Psi(x-y)}{\varepsilon_n}\, g(y)$

Vale $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n = \frac{d\Psi}{dx}\Big|_{x-y} g(y)$ e $|h_n| < |h|$ con $\int|h| < \infty$

per il Th conv. dominata

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x-y)\, g(y)\,dy$$

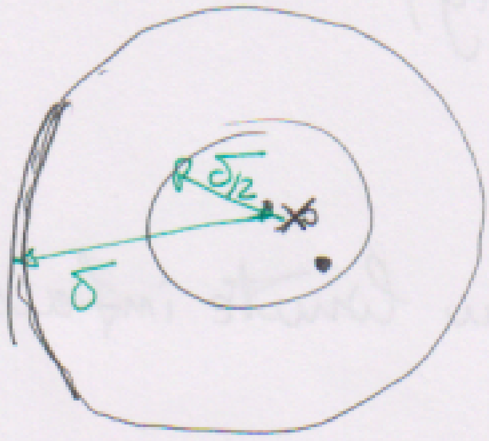
in maniera analoga si dimostra che posso scambiare derivate ed integrale. Tornando in $\mathbb{R}^n$

$$\partial_t u - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_t \Psi - \Delta_x \Psi)\big|_{x-y}}_{=0}\, g(y)$$

Punto 2)

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$

$$|y - x_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$$



Studio $\lim\limits_{(x,t) \to (x_0, 0)} u$

posso già prendere $|x - x_0| < \delta/2$

Utilizzando $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x,t)\,dx = 1 \Rightarrow g(x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t)\, g(x_0)\,dy$

$$u(x,t) - g(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t)\big(g(y) - g(x_0)\big)\,dV(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0,\delta)} \psi(x-y,t)\,|g(y) - g(x_0)|\,dV(y) + \int_{B(x_0,\delta)} \psi(x-y)\,|g(y) - g(x_0)|\,dy$$

$$|u(x,t) - g(x_0)| \le \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n - B(x_0,\delta)} \psi(x-y,t)\,|g(y) - g(x_0)|\,dV(y)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{B(x_0,\delta)} \psi(x-y,t)\,|g(y) - g(x_0)|\,dV(y)}_{\mathrm{II}}$$

$$I \le \varepsilon \int_{B(x_0,\delta)} \psi(x-y,t)\,dy \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t)\,dV(y) = \varepsilon$$

$$II = \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0,\delta)} \psi(x-y,t)\,|g(y)-g(x_0)|\,dV(y)$$

Cerchiamo un limite inferiore di $|x-y|$

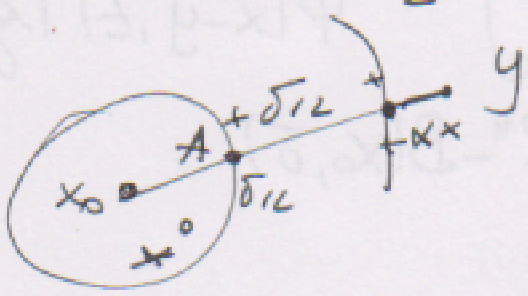
Sappiamo $\frac{1}{2}|y-x_0| \ge \frac{\delta}{2}$

$|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$

$$|y-x_0| = |y-x+x-x_0| \le |y-x| + |x-x_0| \le$$

$$|y-x| + \frac{\delta}{2} \le |y-x| + |y-x_0|\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|y-x| \ge |y-x_0|\frac{1}{2}} \Rightarrow -|x-y| \le -|y-x_0|\frac{1}{2}$$



Alternativamente

$$|x-y| \ge \min_{x\in B(x_0,\delta/2)} |x-y| = |x_A-y| = \frac{\delta}{2}+\alpha = \frac{1}{2}|y-x_0| + \frac{\alpha}{2} \ge |y-x_0|\frac{1}{2}$$

$$\frac{|y-x_0|}{2} = \frac{\delta}{2}+\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\delta}{2}+\alpha = \frac{|y-x_0|}{2}+\frac{\alpha}{2}$$

Torniamo al int. II

$$II = \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0,\delta)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y) - g(x_0)| \, dV(y) \leq$$

$$\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0,\delta)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, dV(y)$$

e^x monotona

$$\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0,\delta)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} \, dV(y)$$

Cambio variabile $z = \dfrac{y-x_0}{4\sqrt{t}}$ $\quad dV(y) = dV(z)(16t)^{n/2}$

$$|y-x_0| > \delta \Rightarrow |z| > \frac{\delta}{4\sqrt{t}}$$

$$II \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\delta/4\sqrt{t})} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{n/2} e^{-|z|^2} \, dV(z)$$

nel limite $t \to 0$ $\quad \cancel{\mathbb{R}}\, B(0,\delta/4\sqrt{t}) \to \mathbb{R}^n \Rightarrow II \to 0$

Legame di ψ con misura di Dirac.

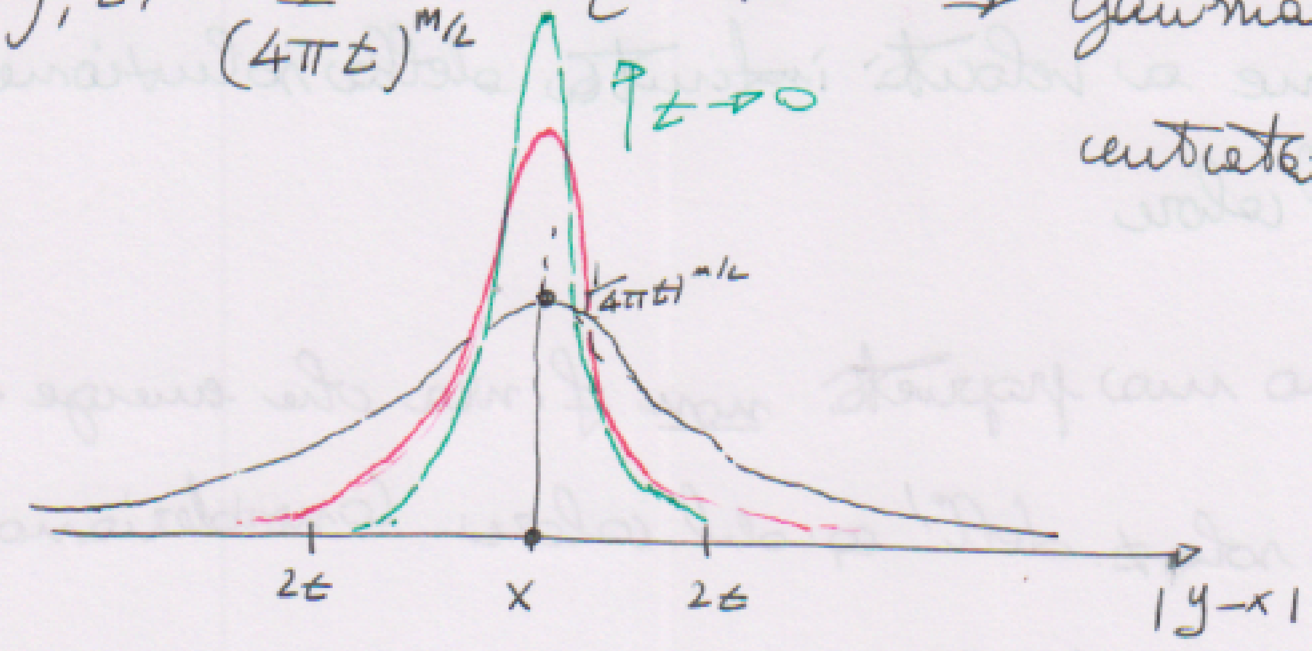
Abbiamo verificato

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t)\, g(y) \, d\nu(y) = g(x)$$

quindi $\lim_{t\to 0} \psi(x-y,t) \to \delta(x-y)$, questo risultato

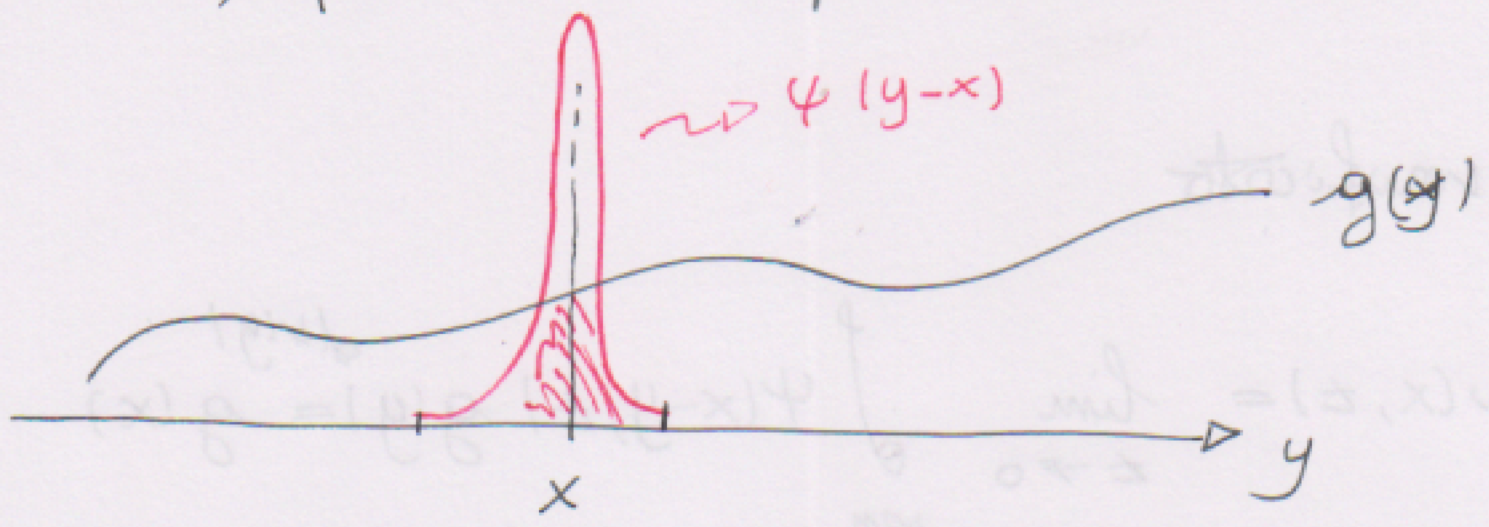
può essere meglio compreso guardando il grafico di ψ

$$\psi(x-y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$ → Gaussiana centrata in x e var. $2t$



Poiché $\int \psi = 1$ indip. da t, quando $t\to 0$ la f. va esponent. a $\emptyset$ attorno a x con decrescita exp. prop. a t.
Conseguentemente, il picco in $y=x$ si alza per preservare la costanza dell'integrale

Quindi, quando t è piccolo



il prodotto $\psi(x-y)g(y) \sim 0$ eccetto attorno a x

$$\Rightarrow \psi(x-y)g(y) \simeq \psi(x-y)g(x)$$

$$u(x) = \int \psi(x-y)g(y)\,dV(y) \overset{t \ll 1}{\sim} g(x)\int \psi(x-y) = g(x)$$

Propagazione a velocità infinita della soluzione dell'eq. del calore

Analizziamo una proprietà <u>non</u> fisica che emerge dallo studio della soluz. dell'eq. del calore. Consideriamo il caso 1D per semplicità.

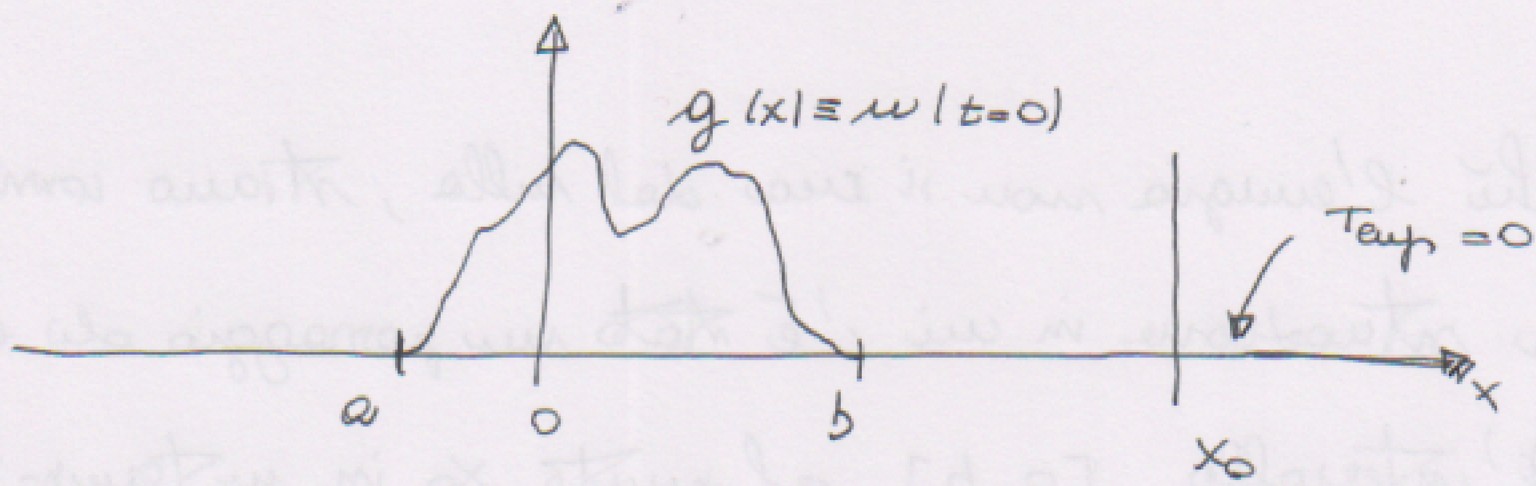
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$u(x,t)$ ad esempio può rappresentare la temperatura di un corpo in una posiz. x al variare del tempo t

Temperatura $\sim$ Energia posseduta dalle molecole del materiale

$g(x)$ è quindi il profilo iniziale di temperatura.

Immaginiamo g a supp. comp.



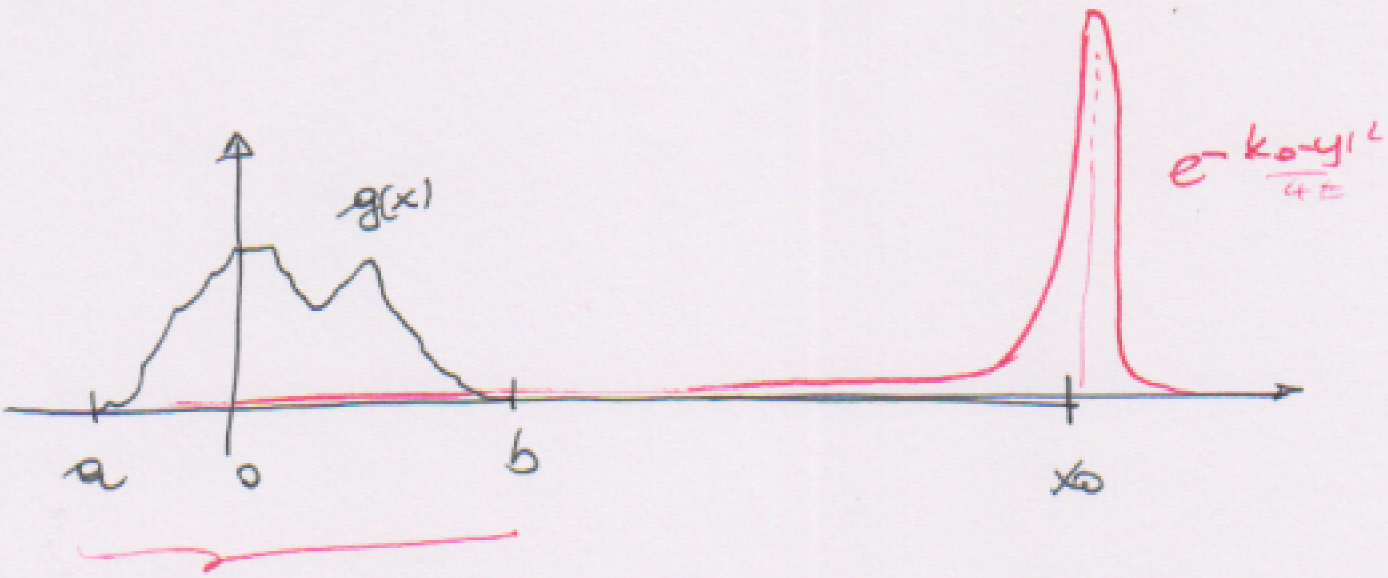
Consideriamo un punto $x_0 \notin$ supp. g ed arbitrariamente lontano

Scegliamo un tempo $t \ll 1$ piccolo a piacere e calcoliamo

la temperatura in x_0 al tempo t (infinitesimo)

$$u(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t}} g(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t}} g(y)\,dy$$

Quindi $u(x_0) \neq 0$ (anche se $\left. e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t}} \right|_{y\in[a,b]} \ll 1$)



$u(x_0) =$ l'integrale del prodotto in questa finestra

Quindi, per quanto piccolo $t>0$ $u(x_0) \neq 0$ con x_0 t.c. $|x_0|$

arbitrariamente grande e t arb. piccolo

Quindi, per $t=0$ $\quad u(x_0)=0 \quad T \sim E = 0$

per $t>0$ $\quad u(x_0,t)>0 \quad$ Temp. (Energia) in $x_0 > 0$

Poichè l'energia non si crea dal nulla, stiamo considerando una situazione in cui c'è ~~stato~~ un passaggio di energia dall'intervallo $[a,b]$ al punto x_0 in un tempo t. Quindi l'eventuale segnale che trasporta questa energia deve ~~avere~~ ~~una~~ viaggiare ad una velocità superiore a $\frac{x_0}{t}$, valore arbitrariamente grande $\Rightarrow$ L'equazione del calore prevede soluzioni il cui supporto si espande istantaneamente a tutto il dominio (oppure anche che si propagano a velocità arbitrariam. grande)