

## METODI DI DEFINIZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO DI SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

Per azione dinamica s'intende un'azione variabile nel tempo e tale da produrre un moto cui sono associate forze d'inerzia e dissipative che entrano in gioco nell'equazione di equilibrio in aggiunta alle componenti elastiche. Se si considera il caso del portale in Figura 1, la differenza di posizione del problema di equilibrio elastico in ambito statico ed in quello dinamico è chiaramente ravvisabile dalla scrittura delle relative equazioni:

$$\text{Equazione di equilibrio in ambito statico: } kx = P \quad (1)$$

$$\text{Caso di forza esterna applicata: } m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P(t) \quad (2)$$

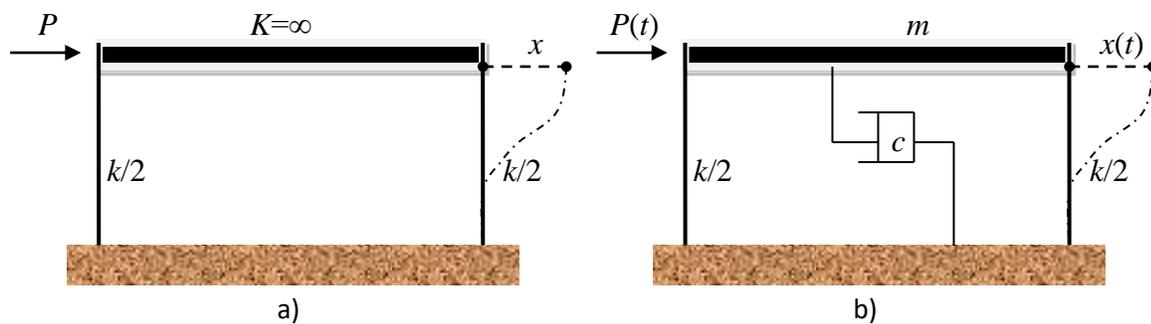


Figura 1 – a) Condizione di equilibrio statico; b) condizione di equilibrio dinamico

In generale si può affermare che un sistema si trovi nella condizione di equilibrio dinamico quando, istante per istante, un'azione esterna variabile nel tempo produce una risposta tale da equilibrare essa stessa oltre alla somma vettoriale delle forze d'inerzia e dissipative, essendo queste ultime non note a priori.

Una qualunque struttura può essere ricondotta a schemi dinamici semplici, caratterizzati da una o più coordinate di spostamento che ne individuino il movimento nel tempo. Nell'ambito della trattazione dinamica classica tali coordinate vengono denominate "generalizzate" o "lagrangiane" e rappresentano le equivalenti dei "movimenti indipendenti" nell'applicazione del "metodo dell'equilibrio" per la soluzione di problemi elastici di tipo statico: esse sono infatti linearmente indipendenti e dalla loro conoscenza può essere univocamente definita la variazione temporale dello stato deformativo e tensionale del sistema in esame.

Una struttura viene generalmente identificata come oscillatore semplice (Single Degree Of Freedom – SDOF) quando il suo moto è soddisfacentemente interpretabile mediante una sola coordinata generalizzata.

E' questo il caso del portale rappresentato in Figura 1b, per cui il solo spostamento del traverso,  $x(t)$ , consente di definirne univocamente la condizione di equilibrio dinamico. L'equazione (2) può essere ottenuta seguendo tre metodi tra loro equivalenti, di seguito illustrati. Essi consistono nell'applicazione rispettivamente del principio di D'Alembert, del teorema dei lavori virtuali, e del teorema di Hamilton.

- Definizione dell'equazione del moto mediante il principio di D'Alembert

Secondo il principio di D'Alembert le forze agenti sulla massa  $m$ , comprese le forze d'inerzia, devono formare in ogni istante un sistema equilibrato. Le forze agenti sono la forza esterna applicata  $P(t)$ , la forza elastica di richiamo,  $f_E$ , la forza d'inerzia,  $f_I$ , e la forza dissipativa  $f_D$ . Riguardo a quest'ultimo termine si osserva come esso esista sempre, per strutture reali pur deformate dinamicamente in campo elastico (ovvero in grado di recuperare la deformazione al termine dell'azione applicata), in virtù dell'inesistenza della condizione di moto perpetuo. Nel caso di sistemi dinamici classici come quello rappresentato in Figura 1b, l'azione smorzante deve essere attribuita alle colonne, da intendere come elementi elastici realizzati mediante materiali come l'acciaio, il cemento armato, il legno etc..., naturalmente dissipativi in relazione alla loro risposta ciclica nel tempo, generalmente riconducibile ad un'ellisse (Figura 2b). Tale contributo di forza  $f_D$  è generalmente considerato includendo nel modello un dispositivo oleodinamico come quello indicato nello schema in Figura 1b e riproposto in Figura 2a.

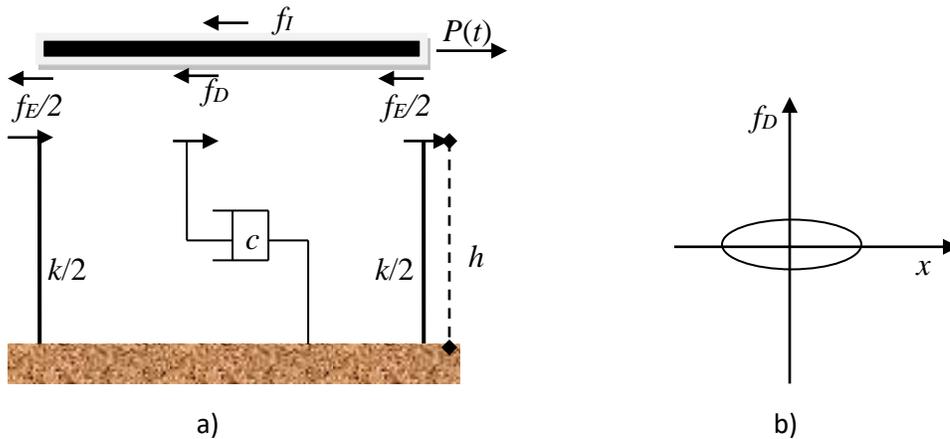


Figura 2 – a) Condizione di equilibrio dinamico del traverso; b) risposta ciclica di un sistema con viscosità lineare

Mentre la forza esterna applicata  $P(t)$  è una funzione nota del tempo, le altre componenti sono legate alle funzioni di spostamento  $x(t)$ , di velocità  $\dot{x}(t)$  e di accelerazione  $\ddot{x}(t)$  dalle seguenti espressioni:

$$f_E = -kx(t) \quad (3)$$

$$f_I = -m\ddot{x}(t) = -ma(t) \quad (4)$$

$$f_D = -c\dot{x}(t) = -cv(t) \quad (5)$$

Nella (3) con  $k$  viene indicata la rigidezza alla traslazione dei pilastri con comportamento "shear type", ovvero la forza di richiamo elastica da essi indotta corrispondentemente ad uno spostamento unitario del traverso:

$$k = 2 \left( 12 \frac{EJ}{h^3} \right) \quad (6)$$

L'equazione del moto ha pertanto l'espressione:

$$-m\ddot{x}(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) + P(t) = 0 \quad (7)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti nella funzione incognita  $x(t)$ .

- *Definizione dell'equazione del moto per applicazione del teorema dei lavori virtuali*

Secondo il teorema dei lavori virtuali il lavoro di tutte le forze presenti, comprese le forze d'inerzia, deve essere nullo per un qualsiasi spostamento virtuale  $\delta x$ .  
Dalle espressioni (3), (4) e (5) si ricava:

$$(-m\ddot{x}(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) + P(t))\delta x = 0 \quad (8)$$

Dovendo essere verificata in ogni istante e per un qualunque spostamento virtuale, la (8) produce l'equazione del moto già ottenuta dall'applicazione del principio di D'Alembert. Il teorema dei lavori virtuali sembra, per il caso considerato, un'inutile complicazione rispetto al più immediato principio di D'Alembert. Tuttavia, nell'equazione del lavoro virtuale i contributi delle forze compaiono sotto forma di grandezze scalari e ciò può sensibilmente facilitare la scrittura dell'equazione del moto per strutture di maggiore complessità dove la natura vettoriale delle forze renda difficoltosa l'applicazione del principio di D'Alembert. E' importante peraltro notare che il teorema dei lavori virtuali richiede, come il principio di D'Alembert, la preventiva esplicitazione delle forze elastica, dissipativa e d'inerzia in funzione dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione, rispettivamente.

- *Definizione dell'equazione del moto per applicazione del teorema di Hamilton*

Prima d'introdurre il teorema di Hamilton è opportuno definire l'energia cinetica  $T$ :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (9)$$

la funzione di dissipazione  $D$ :

$$D = \frac{1}{2}c \int_{-\infty}^t v^2 d\tau \quad (10)$$

e l'energia potenziale totale  $V$ :

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - p_c x \quad (11)$$

Nella (11)  $p_c$  rappresenta la risultante delle forze conservative applicate al sistema. Ai fini della generalizzazione del problema si considerino inoltre anche eventuali forze non conservative di risultante  $p_n$  a cui sia associato il seguente lavoro  $W_n$ :

$$W_n = - \int_{-\infty}^t p_n v d\tau \quad (12)$$

Per ogni intervallo temporale  $[t_1, t_2]$  si definisce il funzionale di Hamilton  $H(t_1, t_2)$ :

$$H(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (T - V + D + W_n) d\tau \quad (13)$$

Esso rappresenta uno scalare dipendente dalla funzione di spostamento  $x$  e dalla sua derivata prima,  $v$ , attraverso le espressioni di  $T$ ,  $V$ ,  $D$  e  $W_n$ . Se al posto della  $x$  si considerasse un'altra funzione diversa dalla risposta effettiva della struttura, il funzionale di Hamilton assumerebbe un valore differente da quello reale. Si consideri ora l'insieme di tutte le possibili funzioni con derivata continua e coincidenti, negli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , con la funzione  $x$ . Sotto ipotesi generalmente verificate nei casi di pratico interesse il teorema di Hamilton afferma che, tra tutte queste funzioni, la  $x$  soluzione del problema dinamico è quella che, per ogni intervallo temporale  $[t_1, t_2]$ , fa assumere al funzionale di Hamilton il valore minimo.

Il teorema di Hamilton rappresenta l'estensione al caso dinamico del teorema di minimo dell'energia potenziale totale.

La funzione  $x$  che rende minimo il funzionale di Hamilton  $H(t_1, t_2)$  può essere ottenuta, secondo un teorema di calcolo delle variazioni, per soluzione della seguente equazione differenziale di Eulero seguente:

$$\frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial v} = 0 \quad (14)$$

Dalle espressioni di  $T$ ,  $V$ ,  $D$  e  $W_n$  si ricava:

$$\frac{\partial(T)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial(T)}{\partial v} = mv \quad (15.a)$$

$$\frac{\partial(V)}{\partial x} = kx - p_c; \quad \frac{\partial(V)}{\partial v} = 0 \quad (15.b)$$

$$\frac{\partial(D)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial(D)}{\partial v} = c \int_{-\infty}^t v d\tau \quad (15.c)$$

$$\frac{\partial(W_n)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial(W_n)}{\partial v} = - \int_{-\infty}^t p_n d\tau \quad (15.d)$$

dalle quali si ottiene:

$$\frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial x} = kx - p_c \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} (mv + c \int_{-\infty}^t v d\tau - \int_{-\infty}^t p_n d\tau) \quad (17)$$

La (14) pertanto diventa:

$$-ma - cv - kx + p_c + p_n = 0 \quad (18)$$

che coincide con la (7) ove si ponga:

$$P(t) = p_c(t) + p_n(t)$$

La maggior complessità di applicazione del teorema di Hamilton è giustificata dalla circostanza che esso non richiede l'esplicitazione delle forze, ma soltanto di grandezze scalari come le energie  $T$ ,  $V$ ,  $D$  e  $W_n$ . Ciò ne rende particolarmente interessante l'impiego nel caso di analisi di sistemi complessi per i quali l'esplicitazione delle forze richiesta dal principio di D'Alembert o dal teorema dei lavori virtuali necessita di operazioni su vettori di non sempre facile interpretazione.

## SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

- Sistema non smorzato nello stato di oscillazioni libere

Si consideri un sistema dinamico idealmente non smorzato e se ne definisca l'equazione del moto in assenza di forzanti esterne:

$$m\ddot{x} + kx = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (19)$$

La (19) è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti la cui soluzione generale è data dalla seguente funzione:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (20)$$

Nella (20)  $C_1$  e  $C_2$  sono due costanti complesse coniugate ed  $s_1, s_2$  rappresentano le due soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$ms^2 + k = 0 \quad (21)$$

definite come:

$$s_{1,2} = \pm i \sqrt{k/m} = i \omega_1 \quad (22)$$

essendo  $i$  l'unità immaginaria ed  $\omega_1$  la pulsazione propria del sistema.  
Applicando la trasformazione di Eulero per cui:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \cdot \sin b) \quad (23)$$

la (20) può essere riscritta come segue:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t \quad (24)$$

Nella (24)  $A$  e  $B$  sono costanti reali, definite come segue in relazione alle precedenti  $C_1$  e  $C_2$ :

$$A = C_1 + C_2; \quad B = i \cdot (C_1 - C_2)$$

Imponendo le condizioni al contorno  $x(0)=x_0$  e  $v(0)=v_0$ , la (24) assume la seguente espressione:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \quad (25)$$

Dalla (25), riportandone le componenti (vettori reciprocamente ortogonali, rotanti con velocità angolare  $\omega_1 t$ ) sul cosiddetto “piano di Argand” mostrato in Figura 3a, è altresì comprensibile il significato del vettore  $\rho$ , rappresentativo dell’ampiezza massima di oscillazione del sistema dinamico di partenza:

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_1}\right)^2}$$

e dell’angolo di fase  $\theta$ :

$$\theta = \arctg \frac{v_0}{\omega_1 x_0}$$

In relazione al vettore risultante la (25) può pertanto essere riscritta come segue:

$$x(t) = \rho \cos(\omega_1 t - \theta) \quad (26)$$

Dal grafico in Figura 3b, riprodotto la risposta dell’oscillatore semplice nella condizione di “oscillazioni libere”, soluzione della (19), vengono introdotte altre due grandezze di seguito definite come il periodo proprio di vibrazione del sistema,  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{f_1} \quad (27)$$

inteso corrispondente alla durata temporale di un ciclo armonico completo caratterizzante la risposta (Figura 3b), e la frequenza propria  $f_1$ , pari al suo inverso.

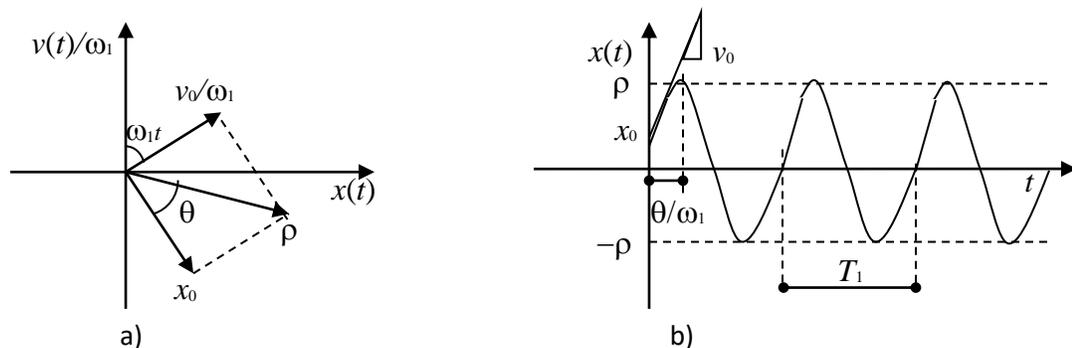


Figura 3 – a) Rappresentazione grafica della variazione della risposta nel piano di Argand;  
b) risposta di un sistema non smorzato nella condizione di oscillazioni libere

- Sistema smorzato nello stato di oscillazioni libere

Si consideri un sistema dinamico equivalente al precedente ma dotato di smorzamento; l'equazione del moto in assenza di forzanti esterne diventa:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (28)$$

La (28) è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, con equazione caratteristica così espressa:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (29)$$

Le soluzioni della (29) sono le seguenti:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (30)$$

Definendo come rapporto di smorzamento  $\xi$  il rapporto fra il coefficiente  $c$  di smorzamento viscoso caratterizzante il sistema e lo "smorzamento critico", inteso come quel valore della stessa costante  $c$  per il quale le radici dell'equazione caratteristica risultino reali e coincidenti:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_1} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (31)$$

in generale si possono distinguere tre differenti condizioni di smorzamento:

- 1) smorzamento critico ( $\xi = 1$ ; le radici sono reali e coincidenti);
- 2) sistema sovrasmorzato ( $\xi > 1$ ; le radici sono reali e distinte);
- 3) sistema sottosmorzato ( $\xi < 1$ ; le radici sono complesse coniugate).

In funzione di  $\xi$ , per casi reali di sistemi sottosmorzati, le (30) possono essere riformulate come segue:

$$s_{1,2} = \omega_1(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}) = -\xi\omega_1 \pm i\omega_{1d} \quad (32)$$

avendo indicato con  $\omega_{1d}$  la pulsazione propria del sistema smorzato, che a sua volta porta a definire il periodo proprio di vibrazione smorzato,  $T_{1d}$ , e la frequenza smorzata  $f_{1d}$ :

$$\omega_{1d} = \omega_1 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (33)$$

$$T_{1d} = \frac{T_1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (34)$$

$$f_{1d} = f_1 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (35)$$

La soluzione generale della (28) assume quindi la seguente espressione:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_1 t} (A \cdot \cos \omega_{1d} t + B \cdot \sin \omega_{1d} t) \quad (36)$$

ed imponendo le condizioni al contorno,  $x(0)=x_0$  e  $v(0)=v_0$ , diventa:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_1 t} \left( x_0 \cos \omega_{1d} t + \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d}} \sin \omega_{1d} t \right) \quad (37)$$

Dall'analisi delle componenti armoniche caratterizzanti la (37) sul piano di Argand (Figura 4a), la (37) può anche essere riformulata in funzione del vettore risultante:

$$x(t) = \rho \cdot e^{-\xi\omega_1 t} \cos(\omega_{1d} t - \theta) \quad (38)$$

essendo:

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d}} \right)^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d} x_0}$$

Tenendo conto della legge esponenziale decrescente che regola l'abbattimento delle massime ampiezze dei cicli successivi di risposta fino allo stato di quiete del sistema e che dipende dall'entità dello smorzamento, per gli oscillatori viscosi lineari come quello in esame, oltre a  $\xi$  può essere introdotto un ulteriore parametro di valutazione dello smorzamento, definito come "decremento logaritmico",  $\delta$ :

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x_n}{x_{n+N}} = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \approx 2\pi\xi \quad (39)$$

ottenuto valutando il logaritmo naturale del rapporto fra le ampiezze massime di due cicli successivi caratterizzanti la risposta nella fase di oscillazione libera. Nella (39) viene anche indicata la relazione che si può stabilire fra i due parametri  $\xi$  e  $\delta$ , approssimativamente valida solo per oscillatori semplici a viscosità lineare ed in presenza di bassi smorzamenti. A questo riguardo si osserva come essa sia ammissibile adottarla nel caso di analisi dinamica di strutture tradizionali alle quali sono generalmente attribuiti dei rapporti percentuali di smorzamento variabili fra il 2% ed il 5%.

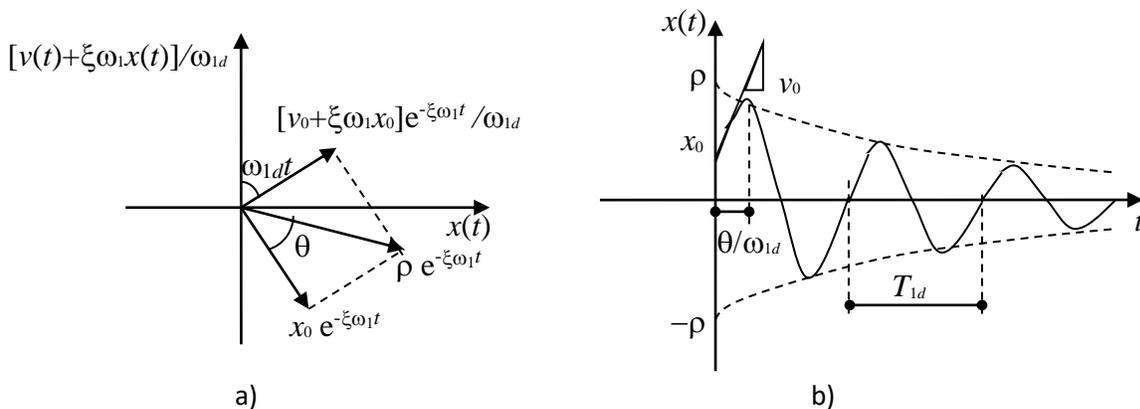


Figura 4 – a) Rappresentazione grafica della variazione della risposta di un sistema smorzato nel piano di Argand; b) risposta di un sistema smorzato nella condizione di oscillazioni libere

- *Sistema non smorzato soggetto ad una forzante di tipo armonico*

Nel caso di forzante esterna di tipo armonico l'equazione del moto di un oscillatore semplice non smorzato di massa  $m$  e rigidezza  $k$  assume la seguente forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = p_0 \sin \omega t \quad (40)$$

La (40) rappresenta un'equazione differenziale non omogenea la cui soluzione generale richiede la definizione di una soluzione particolare come quella di seguito riportata:

$$x_p(t) = G \sin \omega t \quad (41)$$

Derivando due volte la (41) ed introducendone il risultato nell'equazione differenziale di partenza, si ha:

$$G = \frac{1}{1-\beta^2} \frac{p_0}{k}; \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (42)$$

da cui la soluzione particolare della (40) assume la forma seguente:

$$x_p(t) = \frac{1}{1-\beta^2} \frac{p_0}{k} \sin \omega t = \gamma \frac{p_0}{k} \sin \omega t \quad (43)$$

Nella (43)  $\gamma$  rappresenta il coefficiente d'amplificazione dinamica ed ha un andamento asintotico per  $\beta=1$  (Figura 5a), mentre il rapporto  $p_0/k$  è la risposta statica.

Fruendo della rappresentazione grafica della stessa funzione sul piano di Argand si ha anche:

$$x_p(t) = \rho \sin(\omega t - \theta) \quad (44)$$

$$\text{ove: } \rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{|1-\beta^2|}.$$

L'angolo di fase  $\theta$  (Figura 5b) è uguale a 0 per  $\beta < 1$  (ovvero  $x_p(t)$  è in fase con la forzante per  $\omega < \omega_1$ ), è uguale a  $\pi$  per  $\beta > 1$  (è in opposizione di fase per  $\omega > \omega_1$ ), ma è indefinito per  $\beta=1$  (condizione di risonanza).

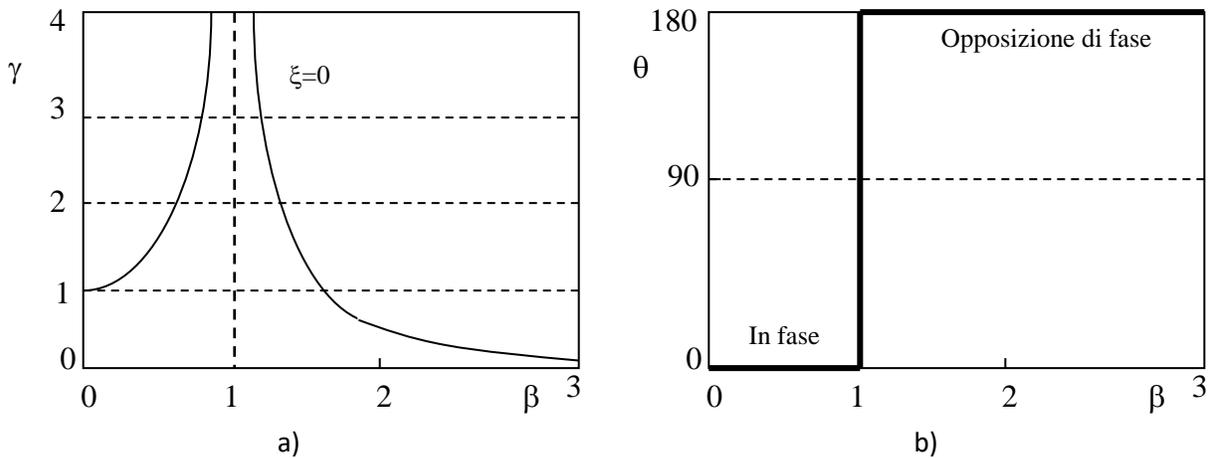


Figura 5 – Rappresentazione grafica delle leggi di variazione  $\gamma-\beta$  (a) e  $\theta-\beta$  (b) nel caso di forzante armonica applicata ed assenza di smorzamento

La soluzione generale dell'equazione differenziale (40) è la seguente:

$$x(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + \gamma \frac{P_0}{k} \sin \omega t \quad (45)$$

che, nel caso di condizioni al contorno naturali, ovvero  $x_0=0$  e  $v_0=0$ , diventa:

$$x_n(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega_1 t) \quad (46)$$

Avendo osservato la singolarità per  $\beta=1$ , la condizione di risonanza richiede di essere studiata proponendo una soluzione particolare diversa dalla (41). Più attinente a ciò che potrebbe avvenire realmente è infatti la seguente formulazione:

$$x_p(t) = G \omega_1 t \cos \omega_1 t \quad (47)$$

Come mostrato nel diagramma in Figura 6a, il coefficiente G determina la legge di accrescimento delle ampiezze delle armoniche successive:

$$G = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{k} \quad (48)$$

e, sostituito nella (47), porta ad avere:

$$x_p(t) = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{k} \omega_1 t \cos \omega_1 t \quad (49)$$

Si consideri poi la condizione di prossimità ad uno del rapporto  $\beta$  ( $\beta \approx 1$ ), corrispondente a quello stato che viene denominato di "battimento". Dalla (46) ed applicando le formule di prostaferesi per cui:

$$\sin \omega t - \sin \omega_1 t = 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (\omega + \omega_1) t \right] \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_1) t \right]$$

altresì effettuando la seguente approssimazione:

$$\frac{1}{2} (\omega + \omega_1) \approx \omega \text{ (oppure } \omega_1)$$

si ottiene:

$$x_n(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega_1 t) \cong \frac{2P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_1) t \right] \cos \omega t = A \cos \omega t \quad (50)$$

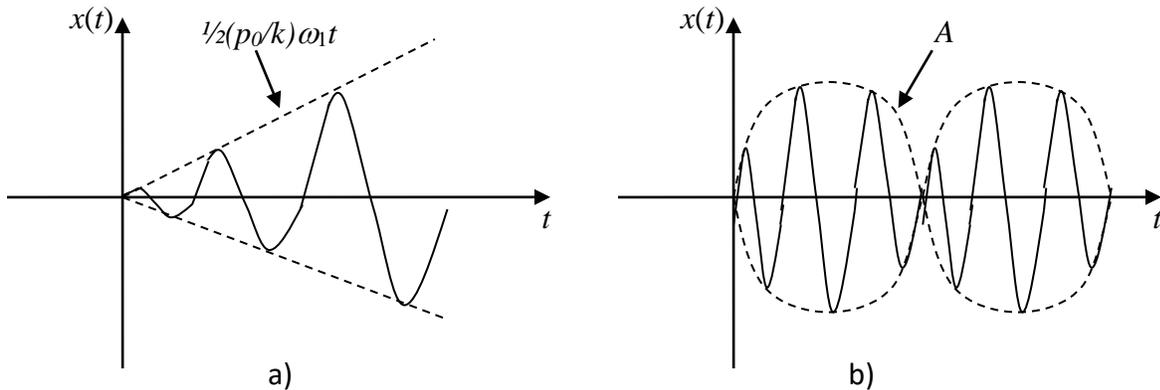


Figura 6 – a) Condizione di risonanza; b) condizione di battimenti

La risposta è una funzione armonica ( $\cos\omega t$ ) con pulsazione  $\omega$  ed ampiezza variabile secondo una legge armonica di pulsazione pari ad  $\frac{1}{2}(\omega - \omega_1)$ :

$$A = \frac{2p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_1)t\right]$$

- Sistema smorzato soggetto ad una forzante di tipo armonico

Nel caso di forzante esterna di tipo armonico l'equazione del moto di un oscillatore semplice smorzato di massa  $m$  e rigidezza  $k$  assume la seguente forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = p_0 \sin \omega t \quad (51)$$

La soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea (51) può essere definita come:

$$x_p(t) = G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t \quad (52)$$

Derivandola due volte e sostituendone il risultato nell'equazione di partenza, dalla separazione dei termini che risultino funzione del  $\sin\omega t$  da quelli funzione del  $\cos\omega t$  si ottengono due equazioni da cui sono desumibili le espressioni delle due costanti  $G_1$  e  $G_2$ :

$$G_1 = \frac{p_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$G_2 = \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

La soluzione particolare assume pertanto la seguente espressione:

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{(1-\beta^2)\sin\omega t - 2\xi\beta\cos\omega t}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \rho \sin(\omega t - \theta) \quad (53)$$

e la soluzione generale diventa:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega_d t} (A \cos \omega_{1d} t + B \sin \omega_{1d} t) + \frac{p_0}{k} \frac{(1-\beta^2)\sin\omega t - 2\xi\beta\cos\omega t}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \\ &= e^{-\xi\omega_d t} (A \cos \omega_{1d} t + B \sin \omega_{1d} t) + \rho \sin(\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (54)$$

essendo:

$$\theta = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (55)$$

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \gamma \frac{p_0}{k} \quad (56)$$

Nella soluzione generale espressa dalla (54) la parte legata all'equazione omogenea associata alla (51) descrive la risposta del sistema dinamico nella "fase transitoria" (così denominata per il rapido annullamento dei suoi effetti in ragione della funzione esponenziale decrescente che moltiplica la somma dei termini armonici fra parentesi), mentre la soluzione particolare descrive la "risposta a regime".

Dalla (56) emerge come l'ampiezza  $\rho$  della risposta a regime sia pari all'ampiezza della risposta statica ( $p_0/k$ ) moltiplicata per il coefficiente di amplificazione dinamica  $\gamma$ .

In Figura 7 vengono mostrate le curve rappresentative della legge di variazione del coefficiente di amplificazione  $\gamma$  in relazione a  $\beta$  (Figura 7a) e quelle relative all'angolo di fase  $\theta$ , sempre in funzione di  $\beta$  (Figura 7b). Dai grafici in Figura 7 emerge come per  $\beta=1$  il coefficiente di amplificazione dinamica  $\gamma$  sia finito, contrariamente a quanto accade per il sistema non smorzato, e pari a  $1/(2\xi)$ ; inoltre, l'angolo di fase  $\theta$  è pari a  $\pi/2$  per qualunque  $\xi$ , evidenziando come, nel caso di risonanza del sistema, la risposta a regime sia in quadratura rispetto alla forza esterna applicata.

Tenendo conto della definizione di  $\rho$ , la cui formulazione dipende dal coefficiente di amplificazione  $\gamma$ , è possibile costruire, per un dato rapporto di smorzamento, la curva rappresentativa delle massime ampiezze in relazione a  $\beta$ . Come si osserva dal grafico in Figura 8, in cui tale curva è riferita ad un rapporto  $\xi$  pari a 0,05 (generalmente

attribuito alle principali tipologie strutturali), l'andamento è analogo a quello della corrispondente funzione  $\gamma-\beta$  e risulta simmetrico nell'intorno di  $\beta=1$ . Quest'ultima proprietà viene mantenuta almeno entro un intervallo di valori di  $\rho$  per i quali la risposta è pari a quella di risonanza  $\rho_{max}$  diviso la  $\sqrt{2}$ , ottenibile per due rapporti di pulsazione  $\beta_1$  e  $\beta_2$  come evidenziato nello stesso grafico. Essa viene peraltro sfruttata per definire un ulteriore parametro di valutazione dello smorzamento, denominato "fattore di qualità inverso" e generalmente identificato con il simbolo  $Q^{-1}$ .

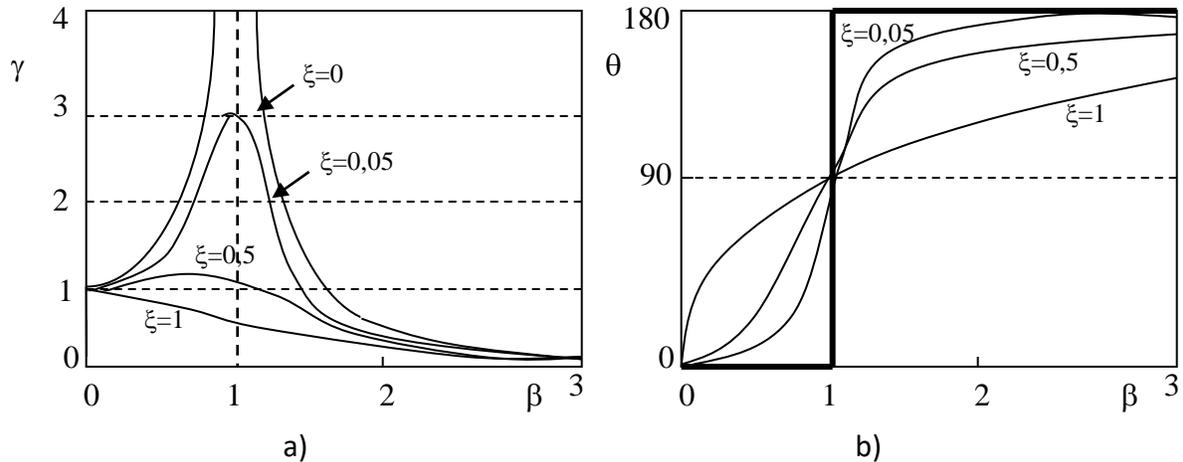


Figura 7 – Rappresentazione grafica delle leggi di variazione  $\gamma-\beta$  (a) e  $\theta-\beta$  (b) nel caso di forzante armonica applicata, per differenti entità dello smorzamento

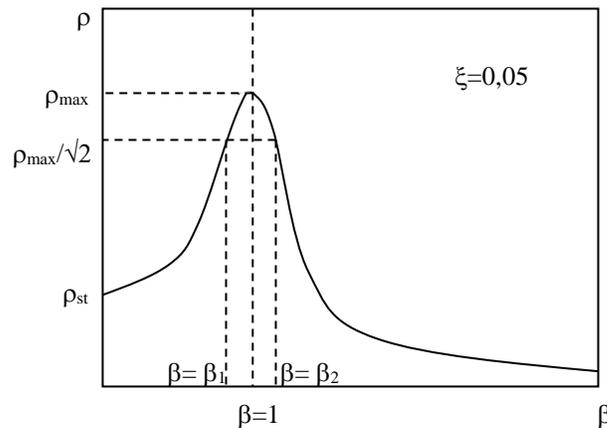


Figura 8 – Rappresentazione grafica della curva delle ampiezze di risposta  $\rho$  in relazione a  $\beta$  per un coefficiente di smorzamento  $\xi$  pari al 5%

Denominando  $\bar{\omega}_0$  la pulsazione corrispondente alla condizione di risonanza ( $\beta=1$ ) ed  $\bar{\omega}_1$  e  $\bar{\omega}_2$  le pulsazioni per cui  $\beta$  assuma rispettivamente i valori di  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , il "fattore di qualità inverso" è ottenuto come segue:

$$Q^{-1} = \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_0} \quad (57)$$

Tale parametro è d'interesse, almeno nel caso di smorzamento viscoso lineare ed in presenza di basse percentuali di  $\xi$ , in ragione della corrispondenza che si può stabilire fra quest'ultimo dato ed i rapporti  $\beta_1$  e  $\beta_2$ :

$$\xi \cong \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) \quad (58)$$

Come peraltro rilevabile dall'esame dei grafici in Figura 7a, la (58) non è più significativa per rapporti di smorzamento superiori al 5%, data la perdita di simmetria della curva di amplificazione rispetto all'ascissa di risonanza.

Ad ogni oscillatore viscoso lineare si deve associare un'energia di dissipazione viscosa data dall'area di un'ellisse di assi  $f_D=2\xi\beta\gamma p_0$  (in risonanza  $f_D=p_0$ , essendo  $\gamma=1/2\xi$ ) e  $x=\rho$  (Figura 9).

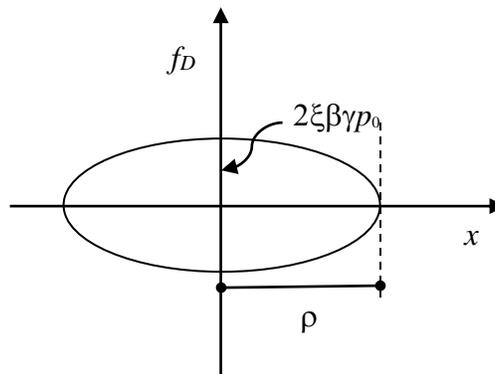


Figura 9 – Ciclo isteretico di un oscillatore viscoso lineare

- *Soluzione dell'equazione del moto di un oscillatore semplice soggetto ad una forzante di tipo impulsivo*

Si consideri il caso in cui un oscillatore semplice sia sottoposto ad una forzante impulsiva d'intensità costante, pari a  $p_0$ , nell'intervallo temporale  $[0, t_1]$ .

Una soluzione particolare dell'equazione del moto può essere semplicemente la seguente:

$$x_p(t) = \frac{p_0}{k} \quad (59)$$

da cui si desume la soluzione generale:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_1 t} (A \cos \omega_{1d} t + B \sin \omega_{1d} t) + \frac{P_0}{k} \quad (60)$$

Se le condizioni iniziali sono le condizioni naturali:  $x_0=0$ ;  $v_0=0$ , la (60) assume la seguente forma:

$$x_n(t) = \frac{P_0}{k} \left[ 1 - e^{-\xi\omega_1 t} \left( \cos \omega_{1d} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_{1d} t \right) \right] \quad (61)$$

Inoltre, nel caso in cui il sistema sia debolmente smorzato la (61) può essere semplificata in:

$$x_n(t) \cong \frac{P_0}{k} [1 - e^{-\xi\omega_1 t} (\cos \omega_1 t + \xi \sin \omega_1 t)] \quad (62)$$

$$v_n(t) \cong \frac{P_0}{k} \omega_1 e^{-\xi\omega_1 t} \sin \omega_1 t \quad (63)$$

Da tali espressioni possono essere ricavati i valori  $x_n(t_1)$  e  $v_n(t_1)$  che rappresentano le condizioni iniziali delle successive oscillazioni libere.

Nell'ipotesi che sia  $t_1 \ll T_1$  si può porre:

$$e^{-\xi\omega_1 t_1} \cong 1 - \xi\omega_1 t_1 \quad (64a)$$

$$\sin \omega_1 t_1 \cong \omega_1 t_1 \quad (64b)$$

$$\cos \omega_1 t_1 \cong 1 \quad (64c)$$

da cui consegue:

$$x_n(t_1) \approx \frac{P_0}{k} [1 - (1 - \xi\omega_1 t_1)(1 + \xi\omega_1 t_1)] = \frac{P_0}{k} \xi^2 \omega_1^2 t_1^2 \approx 0$$

$$v_n(t_1) \cong \frac{P_0}{k} \omega_1^2 t_1 = \frac{P_0}{m} t_1$$

La forza impulsiva fa sì che la fase di oscillazioni libere abbia uno spostamento iniziale nullo ed una velocità iniziale pari al prodotto della forza  $p_0$  per la durata di applicazione  $t_1$  divisa per la massa  $m$ .

Tale risultato può essere generalizzato nel modo seguente al caso in cui la forza applicata abbia una forma qualsiasi.

Poiché la durata di applicazione della forza è piccola rispetto al periodo proprio del sistema si può assumere, in via approssimata, un valore medio  $a_m$  dell'accelerazione nell'intervallo  $[0, t_1]$ , da cui conseguono le seguenti relazioni esprimenti rispettivamente la velocità  $v_n$  e lo spostamento  $x_n$ :

$$v_n(t) \cong a_m t \quad (65a)$$

$$x_n(t) \cong \frac{1}{2} a_m t^2 \quad (65b)$$

Le (65) soddisfano le condizioni naturali ( $x_0=0$ ;  $v_0=0$ ). Tale approssimazione fa sì che non sia possibile, in generale, avere l'equilibrio dinamico in ogni istante, ma solamente in media. Integrando infatti entrambi i membri dell'equazione del moto fra gli istanti 0 e  $t_1$  si ottiene:

$$\frac{a_m}{t_1} \int_0^{t_1} (m + ct + \frac{1}{2} kt^2) dt = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (66)$$

Quest'ultima equazione rappresenta l'equilibrio dinamico, secondo il principio di D'Alembert, mediato nell'intervallo  $[0, t_1]$ . In essa compaiono, divisi per  $t_1$ , gli impulsi delle forze d'inerzia, dissipativa ed elastica, che uguagliano l'impulso della forza applicata, a sua volta diviso per  $t_1$ . Sviluppando l'integrale a primo membro e semplificando, si ottiene:

$$\left[ 1 + \xi \omega_1 t_1 + \frac{1}{6} (\omega_1 t_1)^2 \right] a_m = \frac{1}{m t_1} \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (67)$$

Poiché la durata  $t_1$  d'applicazione della forza è piccola rispetto al periodo proprio del sistema, le quantità  $\omega_1 t_1$  e  $(\omega_1 t_1)^2$  sono trascurabili, ottenendosi quindi:

$$a_m \approx \frac{1}{m t_1} \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (68)$$

Le corrispondenti espressioni della velocità  $v_n(t_1)$  e dello spostamento  $x_n(t_1)$  all'istante  $t_1$  assumono pertanto la forma:

$$v_n(t_1) \approx \frac{1}{m} \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (69)$$

$$x_n(t_1) \approx \frac{1}{2} \frac{t_1}{m} \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (70)$$

Le oscillazioni libere che seguono l'applicazione della forza hanno condizioni iniziali  $x_n(t_1)$  e  $v_n(t_1)$ .

L'energia cinetica all'istante  $t_1$  ha l'espressione:

$$T(t_1) = \frac{1}{2} m v_n^2(t_1) \approx \frac{1}{2m} \left[ \int_0^{t_1} p(t) dt \right]^2 \quad (71)$$

L'energia potenziale totale all'istante  $t_1$  consta del solo termine di energia potenziale elastica:

$$V(t_1) = \frac{1}{2} k x_n^2(t_1) = \frac{1}{2} \omega_1^2 m \left( \frac{t_1}{2m} \right)^2 \left[ \int_0^{t_1} p(t) dt \right]^2 \approx \frac{(\omega_1 t_1)^2}{8m} \left[ \int_0^{t_1} p(t) dt \right]^2 \quad (72)$$

Da queste ultime due espressioni si vede che il contributo dell'energia potenziale totale  $V(t_1)$  è trascurabile a causa del termine  $(\omega_1 t_1)^2$ . Poiché le oscillazioni libere che seguono l'applicazione della forza dipendono essenzialmente dal contenuto energetico del sistema all'istante  $t_1$ , si deduce che il contributo dello spostamento  $x_n(t_1)$  nel definire le condizioni iniziali può essere trascurato. La velocità iniziale  $v_n(t_1)$  è pari all'area del diagramma forza-tempo, ovvero all'impulso della forza applicata, nell'intervallo  $[0, t_1]$  divisa per  $m$ . In riferimento alla soluzione (37) dell'equazione del moto (28), imponendo le condizioni al contorno:

$$x_0 = 0$$

$$v_0 = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} p(t) dt$$

nella fase di oscillazioni libere la risposta del sistema assume pertanto l'espressione seguente:

$$x(t) \approx \frac{1}{m \omega_{1d}} \left[ \int_0^{t_1} p(t) dt \right] e^{-\xi \omega_1 (t-t_1)} \sin \omega_{1d} (t-t_1) \quad (73)$$

che, per  $t \gg t_1$  può semplificarsi nella:

$$x(t) \approx \frac{1}{m \omega_{1d}} \left[ \int_0^{t_1} p(t) dt \right] e^{-\xi \omega_1 t} \sin \omega_{1d} t \quad (74)$$

In definitiva, facendo valere le ipotesi poste, si può affermare che il moto del sistema nella fase di oscillazioni libere non dipende dalla particolare legge d'applicazione della forza, ma soltanto dal suo impulso nell'intervallo d'applicazione.

- *Soluzione dell'equazione del moto di un oscillatore semplice ad una forzante qualsiasi: analisi nel dominio del tempo*

I metodi di analisi della risposta di un sistema a un grado di libertà sottoposto ad una forza variabile con legge qualsiasi sono sostanzialmente tre: l'analisi nel dominio del tempo, l'analisi nel dominio delle frequenze e l'integrazione al passo dell'equazione del moto. Di tali metodi nel presente paragrafo viene trattato solo il primo, mentre il terzo sarà argomento di un successivo capitolo riguardante l'analisi dinamica non lineare.

L'analisi nel dominio del tempo consiste nell'applicazione del "metodo del nucleo risolvete" secondo il quale una soluzione particolare  $x_p(t)$  ammette la seguente rappresentazione integrale:

$$x_p(t) = \int_0^t K(t, \tau) p(\tau) d\tau \quad (75)$$

La funzione  $K$  è il nucleo risolvete, il cui generico valore  $K(t, \tau)$  rappresenta la risposta all'istante  $t$  per un impulso unitario applicato all'istante  $\tau$ . La (75) può essere intuitivamente giustificata pensando di decomporre un qualsiasi intervallo  $[0, t]$  in un insieme di intervalli di ampiezza  $\Delta\tau$  piccola rispetto al periodo proprio del sistema. Ad ognuno di tali intervalli è approssimativamente associato l'impulso  $p(\tau)\Delta\tau$ , cui corrisponde una risposta  $K(t, \tau)p(\tau)\Delta\tau$ , all'istante  $t$ . La risposta complessiva  $x_p(t)$  all'istante  $t$  si ottiene per sovrapposizione degli effetti, come somma dei lavori  $K(t, \tau)p(\tau)\Delta\tau$  che, facendo tendere ogni  $\Delta\tau$  a zero, produce l'integrale precedente.

La funzione  $K(t, \tau)$  in realtà non dipende dai singoli istanti  $t$  e  $\tau$ , bensì solo dalla loro differenza; può pertanto essere ridefinita come:

$$K(t, \tau) = h(t - \tau) \quad (76)$$

Conseguentemente la (75) assume la seguente espressione, generalmente individuata come "integrale di Duhamel":

$$x_p(t) = \int_0^t h(t - \tau) p(\tau) d\tau \quad (77)$$

Si può dimostrare che la funzione  $h$ , pensata come funzione del tempo, sia la soluzione particolare dell'equazione omogenea associata alla:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = p(t)$$

che verifichi le seguenti condizioni iniziali:

$$h(0) = 0; \quad \frac{dh}{dt}(0) = \frac{1}{m} \quad (78)$$

A partire dalla (74) la funzione  $h(t)$  è esprimibile come segue:

$$h(t) \approx \frac{1}{m\omega_{1d}} e^{-\xi\omega_1 t} \sin \omega_{1d} t \quad (79)$$

ovvero come risposta all'istante  $t$  per un impulso unitario applicato all'istante  $\tau=0$ . Nel dominio del tempo la soluzione particolare alla forza applicata viene rappresentata mediante assemblaggio di soluzioni particolari  $h$  dell'equazione omogenea associata. Dal punto di vista intuitivo, ogni impulso  $p(\tau)\Delta\tau$  nel quale viene pensata decomposta la forza esterna produce delle oscillazioni libere la somma delle quali, nel passaggio al limite per  $p(\tau)\Delta\tau \rightarrow 0$ , fornisce la risposta  $x_p(t)$ .

La soluzione generale diventa pertanto la seguente:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_1 t} \left( x_0 \cos \omega_{1d} t + \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d}} \sin \omega_{1d} t \right) + \frac{1}{m\omega_{1d}} \int_0^t e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin \omega_{1d}(t-\tau) p(\tau) d\tau \quad (80)$$

Nel caso sismico, essendo l'equazione del moto così definita:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = -ma_g(t) \quad (81)$$

la (80) diventa:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_1 t} \left( x_0 \cos \omega_{1d} t + \frac{v_0 + \xi\omega_1 x_0}{\omega_{1d}} \sin \omega_{1d} t \right) - \frac{1}{\omega_{1d}} \int_0^t e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin \omega_{1d}(t-\tau) a_g(\tau) d\tau \quad (82)$$

Nelle (80) ed (82) l'integrale di Duhamel descrive la risposta a regime del sistema dinamico.