# Appunti per Geometria e Algebra Computazionale
# 2-1. Introduzione alle varietà algebriche

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

2 aprile 2020

# Complementi sugli ideali di un anello commutativo

Sia $A$ un anello commutativo con unità (ad esempio $A = K[x_1, \ldots, x_n]$).
Se $I, J$ sono ideali di $A$ allora

$$IJ := < ij | i \in I, j \in J >$$

$$I : J \quad := \{a \in A | aj \in I \ \forall j \in J\}$$

sono ideali di $A$.

**Osservazione** Vale $IJ \subset I \cap J$ e l'inclusione può essere stretta (esempio: $I = J = (x)$).

# Il radicale

Poniamo

$$\sqrt{I} := \{f \in A | \exists n \in \mathbf{N} \text{ tale che} f^n \in I\}$$

$\sqrt{I}$ si dice il radicale di $I$, rimandiamo ai corsi di Algebra (o alle note) per la dimostrazione che è un ideale. Inoltre, se $I$ è un ideale primo, allora $\sqrt{I} = I$.

Abbiamo le ovvie inclusioni:

$$I \subset \sqrt{I} \tag{0.1}$$

$$I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J} \tag{0.2}$$

# L'ideale $I(X)$

## Definizione

*Se $X \subset K^n$ è un sottoinsieme poniamo*

$$I(X) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] | f(x) = 0 \quad \forall x \in X\}$$

*È immediato verificare che $I$ è un ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$.*

$I(X)$ è un ideale che conserva alcune informazioni geometriche del sottoinsieme $X$. È facile verificare la proprietà di *scambio delle inclusioni*, cioè

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad I(Y) \subseteq I(X) \tag{0.3}$$

# $I(X)$ è un ideale radicale.

Un ideale $I$ si dice radicale se $I = \sqrt{(I)}$.

## Esercizio

*Se $X \subset K^n$ provare che $\sqrt{I(X)} = I(X)$, ovvero che $I(X)$ è un ideale radicale.*

## Soluzione

Sia $f \in \sqrt{I(X)}$, quindi $f^n \in I(X)$ per qualche $n$, da cui per ogni $x \in X$ vale $f^n(x) = 0$, pertanto (siccome $K$ è un campo e non ha nilpotenti) $f(x) = 0$, da cui $f \in I(X)$.

**Esempi.** Se $I = (x^2) \subset K[x]$ allora $\sqrt{I} = (x)$.
Se $I =< xy^2z, x^3w^5 >$ allora $\sqrt{I} =< xyz, xw >$
Se $I =< x^\alpha >_{\alpha \in A}$ è un ideale monomiale, allora $\sqrt{I} =< x^{\alpha'} >$ dove

$$\alpha_i{}' = \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha_i \neq 0 \\ 0 \text{ se } \alpha_i = 0 \end{cases}$$

# Esercizi sul radicale

## Esercizio

*Provare che*

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$

# La cubica gobba.

## Esempio

*Sia* $f : K \to K^3$ *data da* $f(t) = (t, t^2, t^3)$ *e poniamo* $V := Im\, f \subset K^3$. $V$ *si chiama la* *<u>cubica gobba</u>*, *ed è parametrizzata dalle espressioni* $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ . *Adesso vogliamo provare direttamente che se* $K$ *è infinito allora*

$$I(V) = (y - x^2, z - x^3)$$

*Dato* $f \in I(V)$, *scegliendo l'ordine Lex con* $z > y > x$ *ed applicando l'algoritmo di divisione otteniamo* $f = (y - x^2)q_1 + (z - x^3)q_2 + r$ *dove nessun termine di* $r$ *è divisibile per* $LT(y - x^2) = y$ *o per* $LT(z - x^3) = z$. *Pertanto* $r = r(x)$ *da cui si ricava*

$$0 \equiv f(t, t^2, t^3) = 0 + 0 + r(t)$$

*e quindi* $r \equiv 0$ *come volevamo.*

**Esercizio**

*Sia $V \subset K^3$ la cubica gobba. Provare che $f = z^2 - x^4 y \in I(V)$ e trovare esplicitamente una scrittura come combinazione lineare di $y - x^2$ e $z - x^3$. Ripetere l'esercizio con $f = z - xy$, $f = xz - y^2$ (si veda anche l'esercizio seguente).*

**Esercizio**

*Provare che $y - x^2$ e $z - x^3$ costituiscono una base di Gröbner di $I(V)$ secondo l'ordine Lex con $z > y > x$.*

# Le varietà algebriche affini

## Definizione

*Se $I$ è un ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$ poniamo*

$$V(I) := \{a \in K^n | f(a) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

*$V(I)$ si dice una varietà algebrica affine*

**Osservazione** Notiamo subito che se $I = (f_1, \ldots, f_r)$ allora

$$V(I) = \{a \in K^n | f_1(a) = \ldots f_r(a) = 0\}$$

cioè $V(I)$ coincide con il luogo degli zeri dei polinomi $f_1, \ldots, f_r$.
**Esempi.** Se $I$ è un ideale principale generato da un polinomio $f$, scriviamo $V(I) = V(f)$. Queste varietà si chiamano ipersuperfici. Se $deg\ f = 1$ si tratta di varietà lineari, se $deg\ f = 2$ allora $V(f)$ si dice una quadrica.

# Ogni varietà algebrica è intersezione di ipersuperfici

Per il teorema della base di Hilbert e l'osservazione precedente ogni varietà algebrica è intersezione di un numero finito di ipersuperfici. La cubica gobba dell'esempio 0.4 è una varietà algebrica, infatti coincide con $V(I)$ dove $I = (y - x^2, z - x^3)$ (la verifica di questo fatto è immediata).
**Osservazione** La cubica gobba $C$ é una varietá algebrica affine. Infatti verifichiamo che $C = V(I)$ dove $I = (y - x^2, z - x^3)$. Se $p = (x, y, z) \in C$ allora $\exists t$ tale che $p = (t, t^2, t^3)$ e quindi $p \in V(I)$. Viceversa se $p = (x, y, z) \in V(I)$ allora $y - x^2 = 0$ e $z - x^3 = 0$. Pertanto posto $t := x$ abbiamo $p = (t, t^2, t^3)$.
Approfondiremo lo studio delle varietá descritte da equazioni parametriche nel capitolo 10.

**Esercizio**

*Se $I \subseteq J$ sono due ideali, provare che $V(J) \subseteq V(I)$. Questa proprietà di scambio delle inclusioni è analoga alla (0.3).*

**Esercizio**

*Provare che $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$.*

**Esercizio**

*Provare che $V(I) = V(\sqrt{I})$.*

**Esercizio**

*Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata da $(t, t^m, t^n)$ per $n, m \geq 2$. Provare che $V$ è una varietà affine e calcolare $I(V)$.*

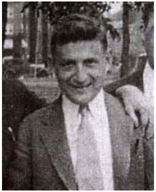
# La topologia di Zariski su $K^n$

**Lemma**

- *i)* $V((1)) = \emptyset$
- *ii)* $V(0) = K^n$
- *iii)* $V(f_1, \ldots, f_r) \cap V(g_1, \ldots, g_s) = V(f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s)$. *In generale* $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$ *e* $\cap_{a \in \mathcal{A}} V(I_a) = V(\sum_{a \in \mathcal{A}} I_a)$
- *iv)* $V(f_1, \ldots, f_r) \cup V(g_1, \ldots, g_s) = V((\ldots, f_i g_j, \ldots))$. *In generale* $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

*Quindi le varietà algebriche affini soddisfano gli assiomi degli insiemi chiusi per una topologia su $K^n$, che si dice topologia di Zariski.*

Oscar Zariski (1889 - 1986)



# Dimostrazione che gli assiomi di una topologia sono soddisfatti.

**Dimostrazione.**

i), ii), iii) seguono subito dalle definizioni. Per provare iv) notiamo che $I, J \supset IJ$ e quindi $V(I) \cup V(J) \subset V(IJ)$. Viceversa sia $a \in V(IJ)$. Se per assurdo $a \notin V(I)$ e $a \notin V(J)$ allora $\exists \quad i \in I$ tale che $i(a) \neq 0$ e $\exists \quad j \in J$ tale che $j(a) \neq 0$. Pertanto $ij(a) \neq 0$ che è una contraddizione. $\square$

**Esempio**

*I chiusi della topologia di Zariski in $K$ sono gli insiemi finiti. Se $K$ è infinito questa topologia è $T1$ ma non di Hausdorff.*

# Prime proprietà di $V(I)$

## Proposizione

$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$$

## Dimostrazione.

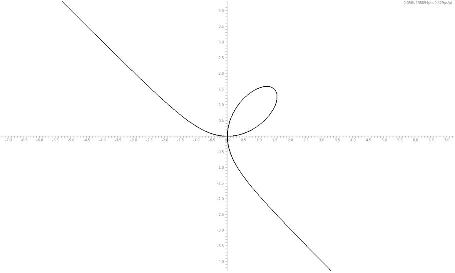
- "$\subset$" Abbiamo $I, J \supset I \cap J$ da cui $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$
- "$\supset$" Abbiamo $IJ \subset I \cap J$ da cui $V(IJ) \supset V(I \cap J)$. A questo punto è sufficiente utilizzare il lemma **??** iv).

$\square$

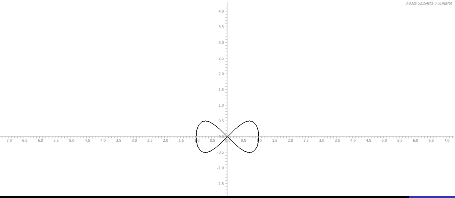
## Esercizio

*Si trovi* $I \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ *tale che* $V(I) \subset \mathbb{R}^3$ *consiste nell'unione del piano* $\{z = 0\}$ *con l'asse delle* $z$.

Molte curve classiche e con bella simmetria sono varietà algebriche, come il Folium di Cartesio $x^3 + y^3 - 3xy$

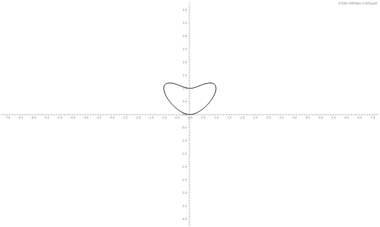


la Lemniscata $y^2 - x^2 + x^4$

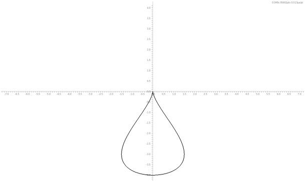


# Esempi di varietà algebriche, curve, II

il Boomerang $y(y^2 + x^2) - x^4 - y^4$

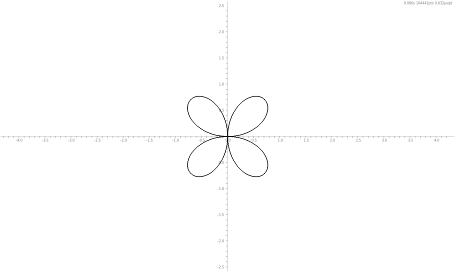


la Goccia $12x^2 + y^3(4 + y)$

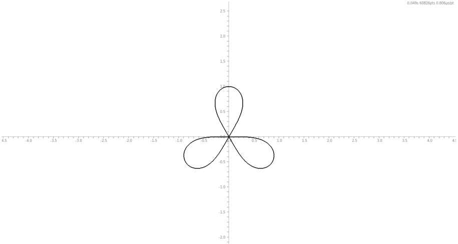


# Esempi di varietà algebriche, curve, III

il Quadrifoglio $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$

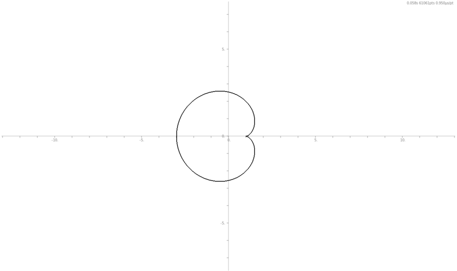


e il Trifoglio $(x^2 + y^2)^3 + 3x^2y - y^3$

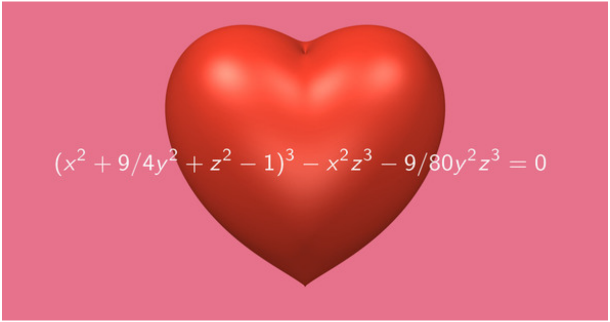


# La cardioide

La Cardioide $(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4((x-1)^2 + y^2)$



# Esempi di varietà algebriche, superfici




Continue on https://imaginary.org/galleries

# Altre proprietà di $V(I)$

## Proposizione

*Se $J$ è un ideale di $K[x_1, \dots, x_n]$ vale*

$$J \subset I(V(J))$$

## Dimostrazione.

Se $j \in J$ allora $j(x) = 0 \quad \forall x \in V(J)$. $\square$

# L'inclusione $J \subset I(V(J))$ può essere stretta

L'inclusione in $J \subset I(V(J))$ può essere stretta, come mostrano i due esempi:

$$J = (x^2) \subset \mathbb{R}[x] \quad \Rightarrow \quad I(V(J)) = I(\text{origine}) = (x) \supsetneq (x^2) = J \tag{0.4}$$

$$J = (x^2+1) \subset \mathbb{R}[x] \quad \Rightarrow \quad I(V(J)) = I(\emptyset) = (1) \supsetneq (x^2+1) = J \tag{0.5}$$

Il primo esempio (0.4) porta a considerare che:

**Lemma**

*Se $J$ è un ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$ vale $\sqrt{J} \subset I(V(J))$.*

**Dimostrazione.**

Abbiamo visto che $J \subset I(V(J))$. Basta applicare (0.2) ed il fatto che $\sqrt{I(V(J))} = I(V(J))$ (eserc. 0.2). $\square$

# Enunciato del NullStellenSatz

Il secondo esempio (0.5) è di natura diversa da (0.4) ed è legato al fatto che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Infatti vale il

**Teorema (Teorema degli zeri di Hilbert, HilbertNullStellenSatz.)**

*Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e sia $J$ un ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$. Allora*

$$\sqrt{J} = I(V(J))$$

Dimostreremo nel capitolo 8 il teorema degli zeri di Hilbert.

**Proposizione**

*Vale $X \subset V(I(X))$.*

**Dimostrazione.**

Se $a \in X$ allora $f(a) = 0 \ \forall f \in I(X)$. □

# Chiusura di Zariski

**Lemma**

*Se $W$ è una varietà algebrica affine allora $W = V(I(W))$*

**Dimostrazione.**

Sia $W = V(J)$. Abbiamo $J \subset I(W)$ per la Prop. 0.16. Utilizzando l'esercizio 0.8 segue $W = V(J) \supset V(I(W))$. L'altra inclusione è stata vista nella Prop. precedente. $\square$

**Proposizione (chiusura secondo la topologia di Zariski)**

*Se $S \subset K^n$ è un sottoinsieme allora $V(I(S)) = \overline{S}$*

**Dimostrazione.**

Abbiamo già visto che $S \subset V(I(S))$ e quindi $\overline{S} \subset V(I(S))$ perché $V(I(S))$ è chiuso. Viceversa consideriamo che $I(\overline{S}) \subset I(S)$ e quindi $V(I(S)) \subset V(I(\overline{S})) = \overline{S}$ per il lemma precedente. $\square$

# Varietà irriducibili

## Definizione

*Una varietà algebrica affine $V \subset K^n$ si dice riducibile se $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i$ sottovarietà proprie. Altrimenti si dice irriducibile.*

## Teorema

*Sia $V$ una varietà algebrica affine*

$$V \text{ è irriducibile} \iff I(V) \text{ è primo}$$

## Dimostrazione.

- $\Rightarrow$ Sia $fg \in I(V)$ e poniamo $V_1 := V \cap V(f)$, $V_2 := V \cap V(g)$. Se $f \notin I(V)$ allora $V_1 \neq V$. Preso un qualunque $a \in V \setminus V_1$ abbiamo $f(a) \neq 0$ e quindi $g(a) = 0$, cioè $a \in V_2$. Quindi $V = V_1 \cup V_2$ e per l'ipotesi $V = V_2$ da cui $V \subset V(g)$ e $g \in I(V)$ Segue che $I(V)$ è primo.

# $V$è irriducibile $\iff I(V)$è primo, dim di $\Leftarrow$

**Teorema**

*Sia $V$ una varietà algebrica affine*

$$V \text{è irriducibile} \iff I(V) \text{è primo}$$

**Dimostrazione.**

- $\Leftarrow$ Sia per assurdo $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i$ sottovarietà algebriche proprie. Pertanto esistono $f \in I(V_1) \setminus I(V)$ e $g \in I(V_2) \setminus I(V)$ da cui $fg$ si annulla su $V_1 \cup V_2 = V$. Quindi $fg \in I(V)$ e per l'ipotesi $f \in I(V)$ oppure $g \in I(V)$, che è una contraddizione.

$\square$

# Corrispondenza ideali - varietà

Se per il momento diamo per buono il Teorema degli Zeri di Hilbert , otteniamo il

## Corollario

*Sia $K$ algebricamente chiuso. C'é una corrispondenza biunivoca naturale tra varietá algebriche ed ideali radicali di $K[x_1, \ldots, x_n]$ data da $W \mapsto I(W)$ con inversa $J \mapsto V(J)$. La corrispondenza porta varietá algebriche irriducibili in ideali primi e viceversa.*

## Dimostrazione.

La prima parte dell'enunciato segue direttamente dal teor. precedente. Se $W$ é una varietá irriducibile allora $I(W)$ é primo e $V(I(W)) = W$ . Se $J$ é un ideale primo $I(V(J)) = \sqrt{J} = J$ per il NullStellenSatz. Quindi $V(J)$ é irriducibile per il teorema precedente. $\square$

# Osservazione critica su ideali primi e varietà irriducibili

Se $I$ è primo allora $V(I)$ è irriducibile, usando il Teorema precedente e il NullStellenSatz. Il viceversa è vero se $I$ è radicale e se $K = \overline{K}$. Su $K = \mathbb{R}$ il viceversa è falso, un controesempio è $I = \left(x \cdot (x^2 + 1)\right)$, che è radicale ma non primo, mentre $V(I)$ è irriducibile.

# Esercizi

- i) Sia $f$ un monomio. Provare che $V(f)$ é dato dall'unione di sottovarietá lineari di codimensione 1.
- ii) Descrivere $V(I)$ dove $I = (xy, xz) \subset K[x, y, z]$
- iii) Sia $I$ un ideale monomiale. Provare che $V(I)$ é dato dall'unione di sottovarietá lineari.