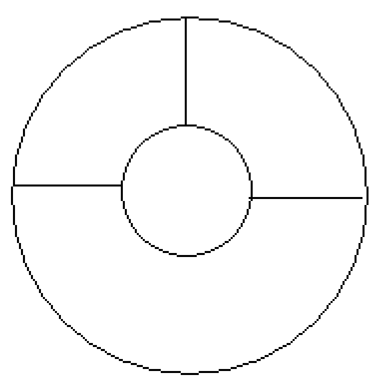
# 3 aprile 2020 - lezione 1

## ***Avvertenza importante!***

***Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di venerdì 3 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Teoria dei grafi” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!***

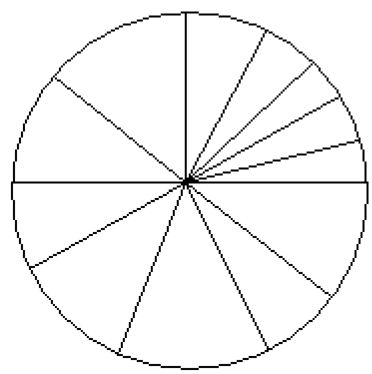
L’ultimo argomento di teoria dei grafi ci riporta a una lezione di matematica del professor Augustus De Morgan (avete presente le “leggi di De Morgan”? Ecco, lui!). Siamo allo University College di Londra, ed è il 23 ottobre 1852. Uno studente, Frederick Guthrie, si fa bello col professor De Morgan di un’osservazione che gli aveva fatto suo fratello Francis: quando si colora una carta geografica in modo che due regioni confinanti abbiano colori diversi, quattro colori bastano sempre.

Certo quattro colori sono necessari: guardate questo disegno, in cui ci sono quattro regioni ciascuna confinante con le altre tre!



Ah, stabiliamo subito un po’ di terminologia, come abbiamo fatto altre volte per evitare di ingolfarci nelle parole. Diciamo che due regioni del piano sono *confinanti* se hanno in comune un arco di curva semplice piana: non basta un punto, ci vuole un arco di curva, per quanto piccolo! E diciamo che una assegnazione di colori alle regioni in cui è suddivisa una certa porzione di piano è una *buona colorazione* (o, equivalentemente, che con quella assegnazione di colori la porzione di piano risulta *ben colorata*) se comunque prese due regioni confinanti queste hanno assegnati colori diversi

Avete capito perché non consideriamo confinanti due regioni che hanno in comune soltanto un punto? Perché in quel caso non ci sarebbe un numero minimo di colori sufficienti per una buona colorazione di qualsiasi porzione di piano!



Che per una buona colorazione quattro colori siano sempre *sufficienti*, però, non apparve affatto ovvio al professor De Morgan, che ci pensò un po’ e poi decise di sottoporre la questione a quel pazzoide che si occupava di cose un po’ strane, sì, sir William Rowan Hamilton, quello che cercava cicli sui grafi in modo che ogni vertice comparisse una e una sola volta…

Perché, vedete, se un disegno con quattro regioni che confinano ciascuna con le altre tre è sufficiente a dimostrare che un minimo di quattro colori è necessario per una buona colorazione, quanto a dimostrare che quel numero è sufficiente è tutt’altro discorso!

Ora, fate attenzione: se trovassimo cinque regioni ciascuna delle quali confina con le altre quattro, dimostreremmo che quattro colori non bastano in generale per una buona colorazione e ce ne vogliono almeno cinque; ma ***non esiste*** una disposizione nel piano di cinque regioni ciascuna delle quali confina con le altre quattro (questo, come vedremo, è facile dimostrarlo). Però (magari, forse, chissà) esistono disposizioni più complicate di (magari, forse, chissà) molte più regioni che non è possibile “ben colorare” con quattro colori soltanto.

Hamilton forse ci pensò davvero, o forse non ci provò neanche. Può anche darsi che gli bruciasse un po’ non aver trovato un bel risultato analogo al teorema di Euler per quella faccenda dei cicli sui grafi. Fatto sta che Hamilton dichiarò che il problema sulla colorazione delle regioni non gli interessava.

Certo, non era un problema facilmente schematizzabile e riducibile a, che so, un’equazione da risolvere o una funzione da studiare e nemmeno (per farci del male, mescolando le due cose) a un’equazione differenziale (brrr... un’equazione in cui l’incognita è una funzione! Fa paura, vero?). Matematici famosi dell’epoca, comunque, si dedicarono all’argomento e qualcuno pubblicò anche una dimostrazione del fatto che quattro colori bastano per una buona colorazione di qualsiasi porzione di piano comunque suddivisa in regioni... Peccato che tutte queste dimostrazioni fossero sbagliate!

(In realtà, una di queste dimostrazioni si può adattare per far vedere che ***cinque*** colori sono sempre sufficienti. La dimostrazione è carina, e la vediamo nella seconda ora di oggi).

Insomma, per farla breve, non vi sorprenderà se vi dico che, alla fine, è venuto fuori che la schematizzazione migliore per questo problema di colorazione è la teoria dei grafi. Prima di vedere come funziona la schematizzazione, e di fare qualche considerazione in proposito, vediamo però un caso in cui bastano addirittura ***due colori*** per una buona colorazione!

Teorema 7.1.1

Sia $\mathcal{C}$ una carta geografica che si possa disegnare nel piano tracciando, in una zona delimitata da una curva semplice chiusa, tratti di curve semplici piane che

– sono chiuse, oppure

– uniscono due punti del confine della zona.

Allora $\mathcal{C}$ può essere colorata (usando colori diversi per regioni confinanti) con due colori.

*Dimostrazione* – Diamo il semplice algoritmo di “buona colorazione” con due colori (*rosso* e *verde*). All’inizio coloriamo in rosso l’intera zona che ospita la carta geografica. Per ogni linea che si traccia per disegnare la carta geografica, operiamo come segue:

– se è una linea chiusa, cambiamo colore a tutte le regioni interne a tale linea chiusa;

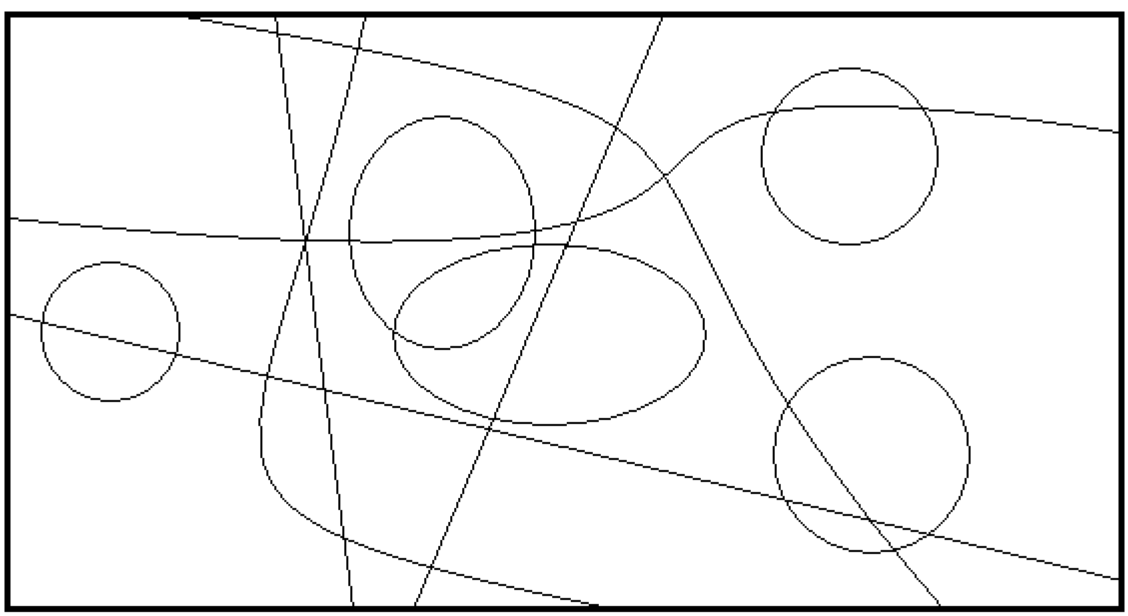
– se è una linea che unisce due punti del confine della zona (e quindi la divide in due parti), cambiamo colore a tutte le regioni di una delle due parti (a nostra scelta).

In sostanza, per ottenere la “buona colorazione” della carta con due soli colori dovete pensare di tracciare una per volta le linee che individuano le varie regioni, applicando ogni volta un passo dell’algoritmo sopra descritto.

Se voi foste precisi e pignoli come deve essere un matematico (ok, ok, so che non lo siete ma *dovreste* esserlo…), a questo punto mi chiedereste di ***dimostrare*** che l’algoritmo sopra descritto fornisce effettivamente un “buona colorazione” delle regioni descritte nell’enunciato del teorema utilizzando soltanto due colori. Ma la dimostrazione non è difficile perché si fa per induzione ragionando sul numero delle linee che formano la carta geografica: se ci sono *zero* linee, due colori bastano sicuramente (di fatto, c’è un’unica regione e quindi un colore è sufficiente!). Ora, supponiamo (ipotesi di induzione) che l’algoritmo dopo $n$ linee abbia prodotto una buona colorazione della carta geografica con due soli colori; l’aggiunta della riga numero $n+1$ e l’applicazione del corrispondente passo dell’algoritmo inverte tutti i colori in una delle due parti che si sono create, garantendo così (senza aggiungere nuovi colori!) che le regioni confinanti (che la nuova linea ha determinato intersecando alcune delle regioni preesistenti) abbiano colori diversi. E grazie al principio di induzione non c’è da dire altro!

Esempio 7.1.2

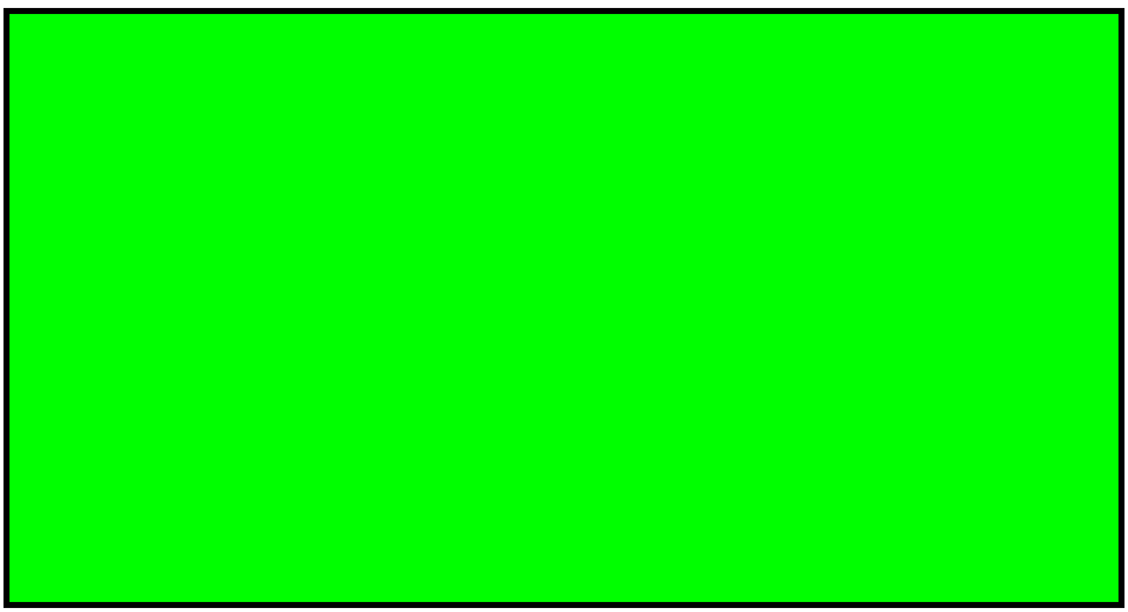
Per colorare questa carta geografica (usando colori diversi per regioni confinanti) sono sufficienti due colori:



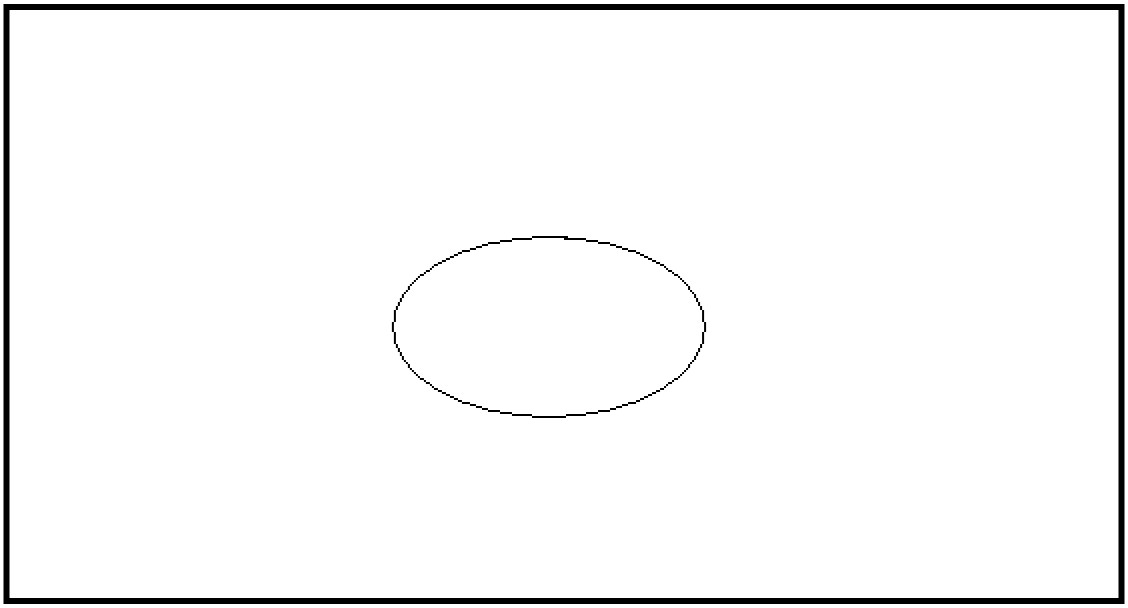
Nelle prossime pagine vedremo come si può procedere, applicando l’algoritmo descritto nella dimostrazione del teorema 7.1.1.

Cominciamo con la regione senza suddivisioni...

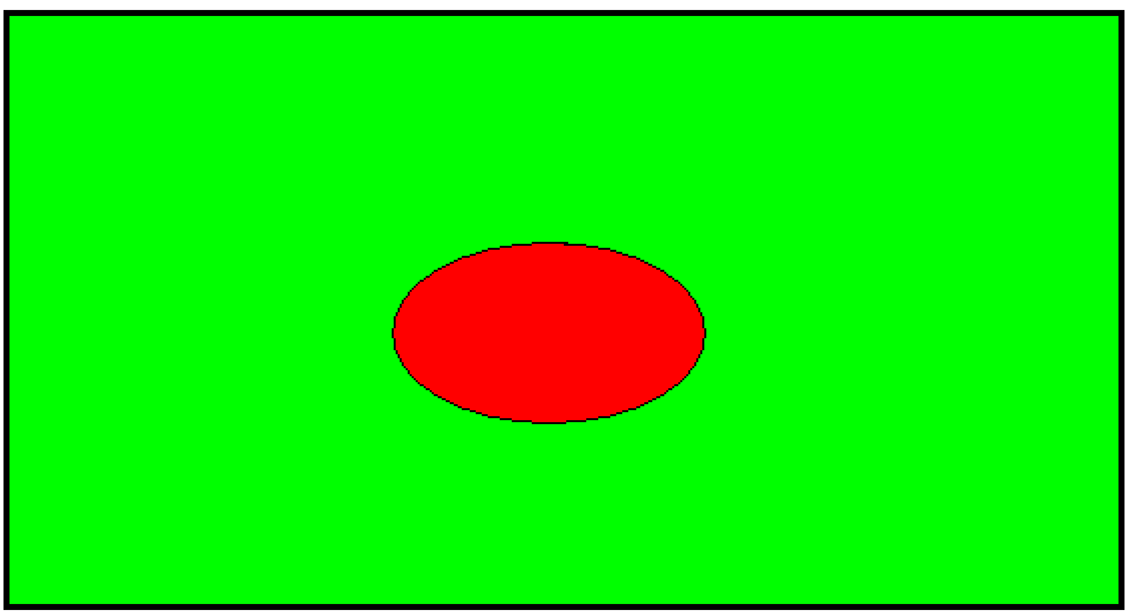
...e assegniamole un colore:



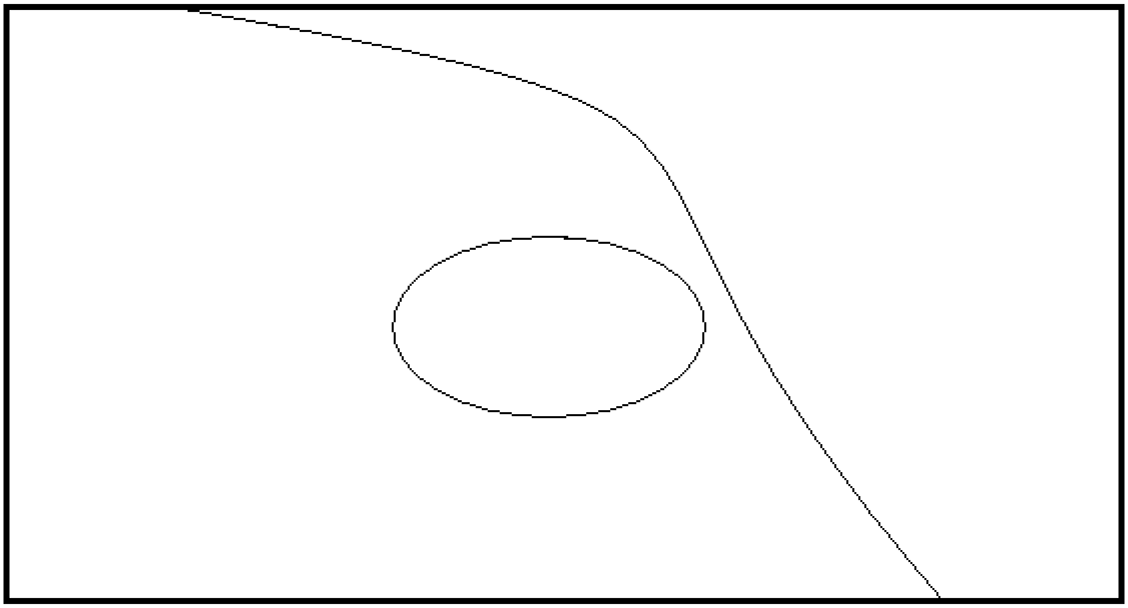
Adesso tracciamo una delle linee che individuano le regioni da colorare...



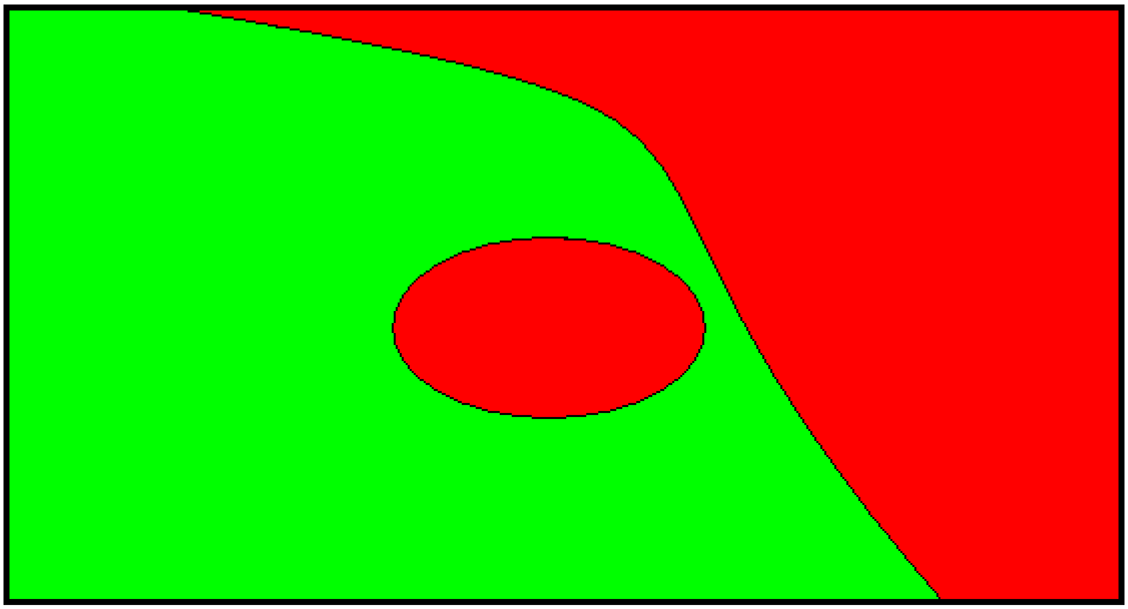
...e cambiamo il colore in una (e una sola) delle due parti che essa individua:



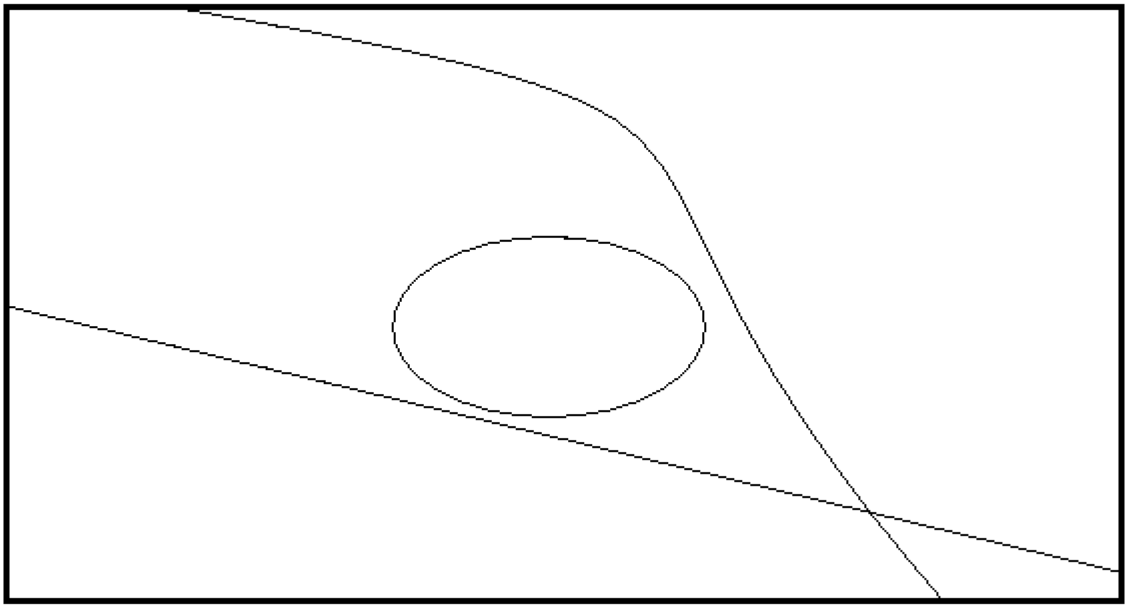
Poi tracciamo un’altra linea…



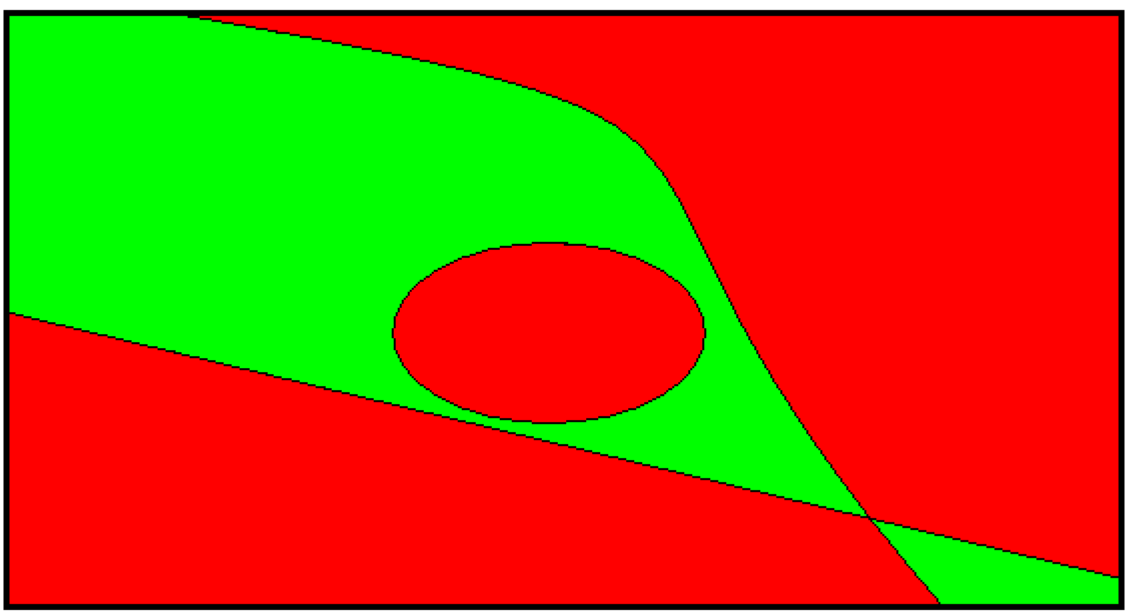
...e cambiamo il colore in una (e una sola) delle due parti che essa individua:



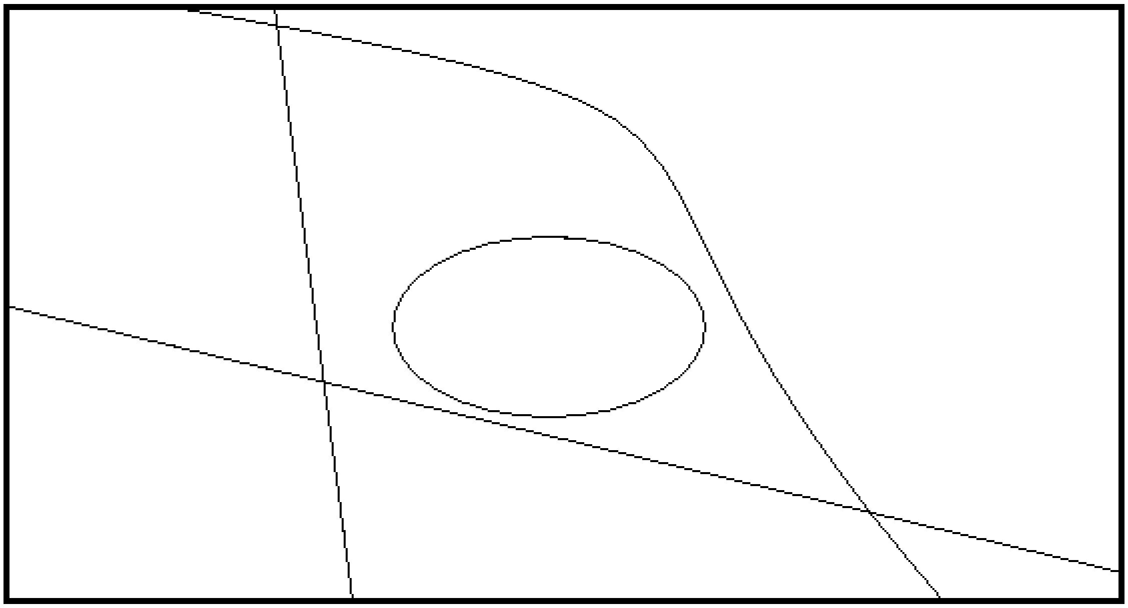
E andiamo avanti così, ad aggiungere una linea per volta…



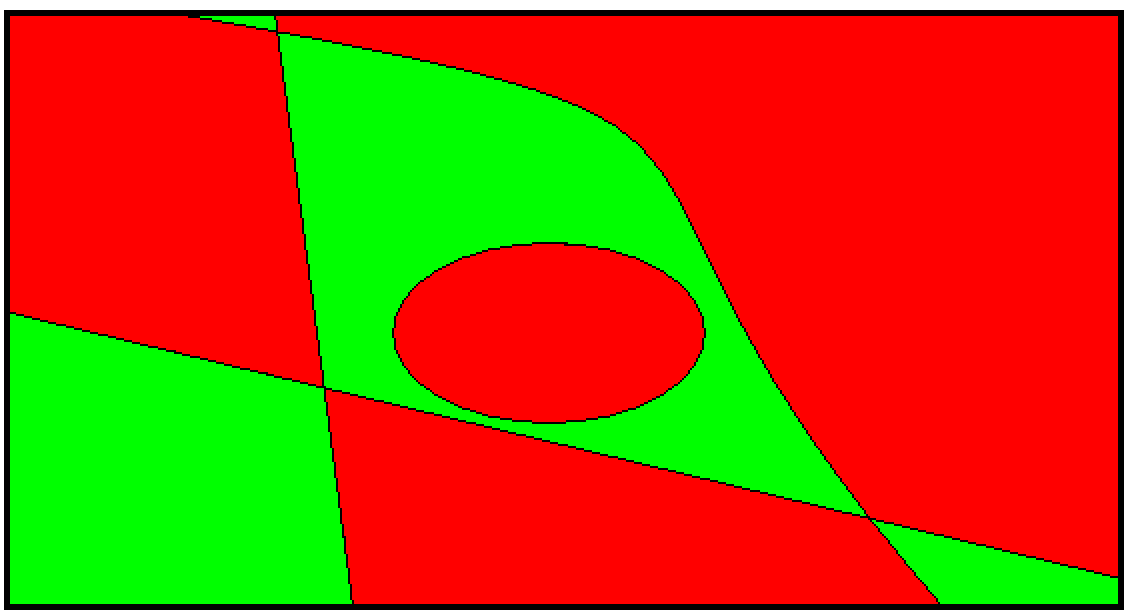
… e cambiare i colori…



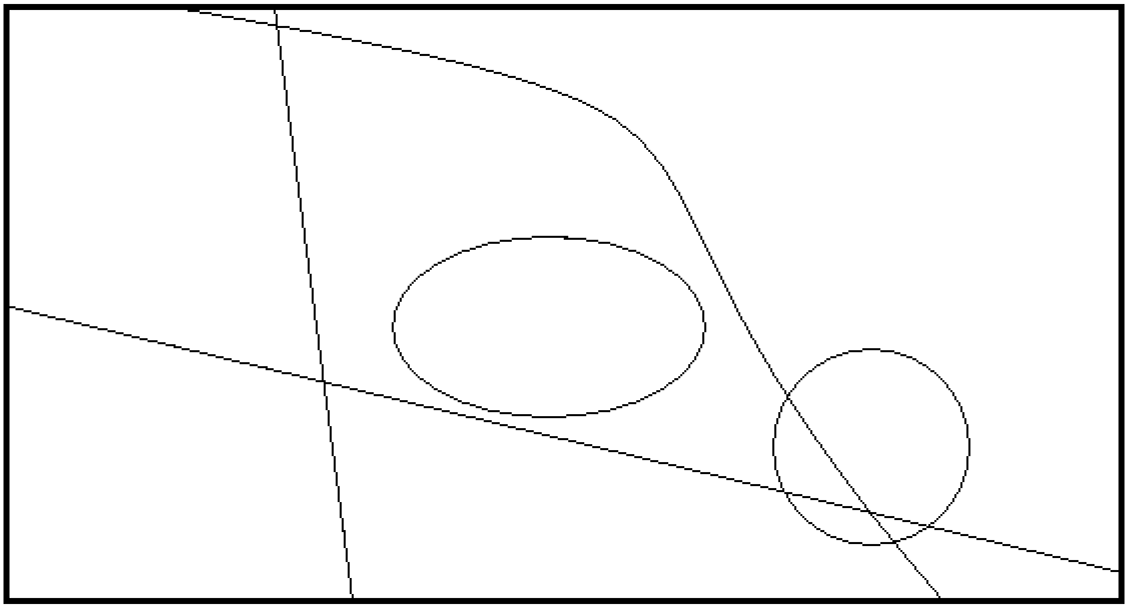
. . . aggiungere una linea. . .



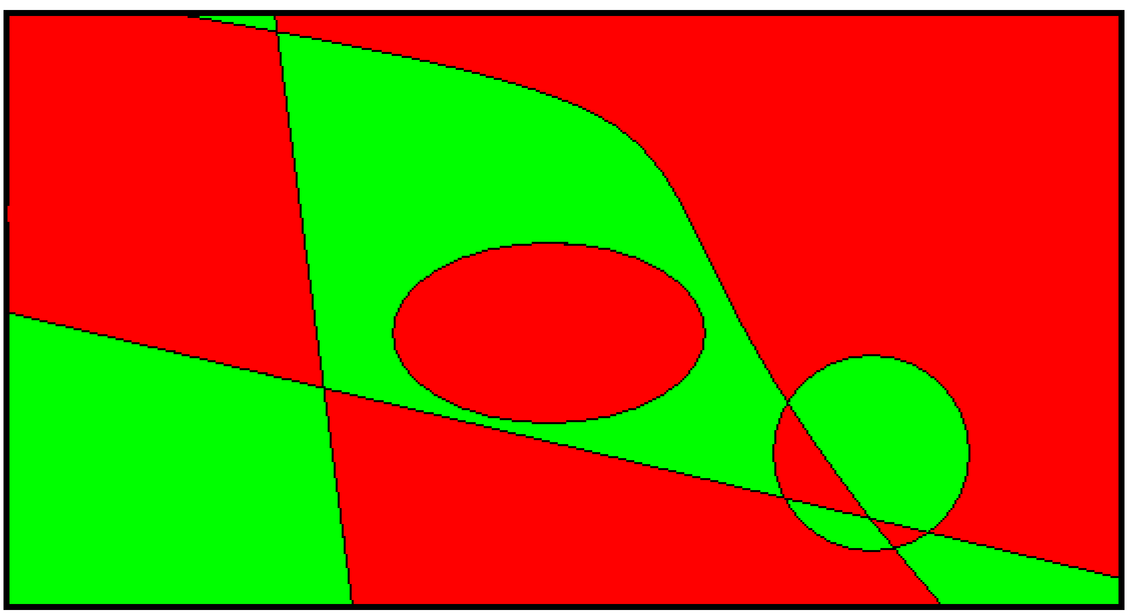
. . . e cambiare i colori. . .



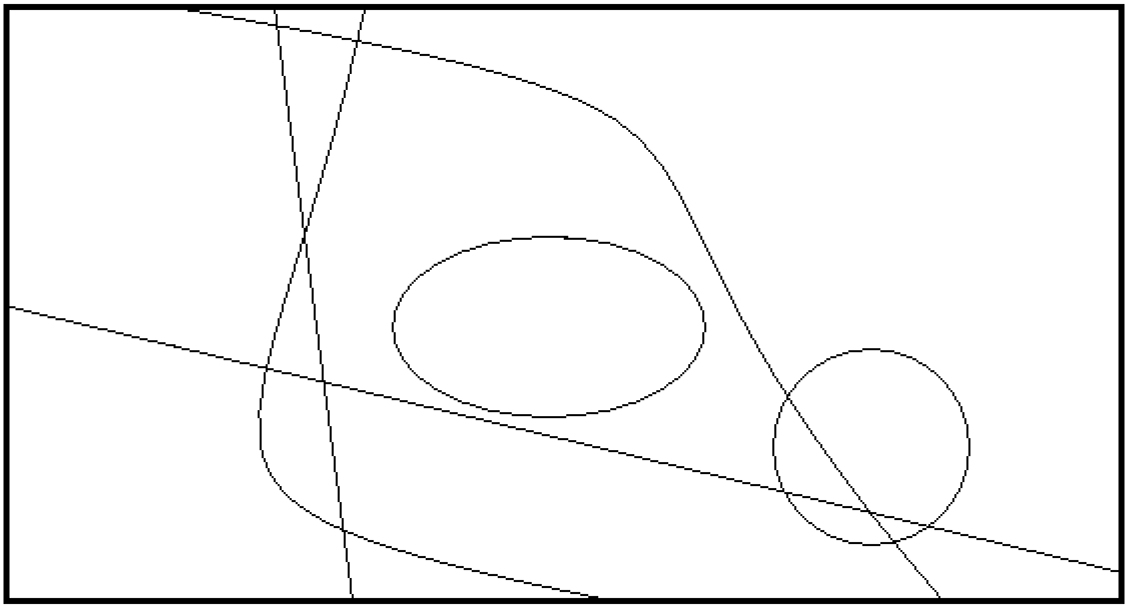
…aggiungere una linea…



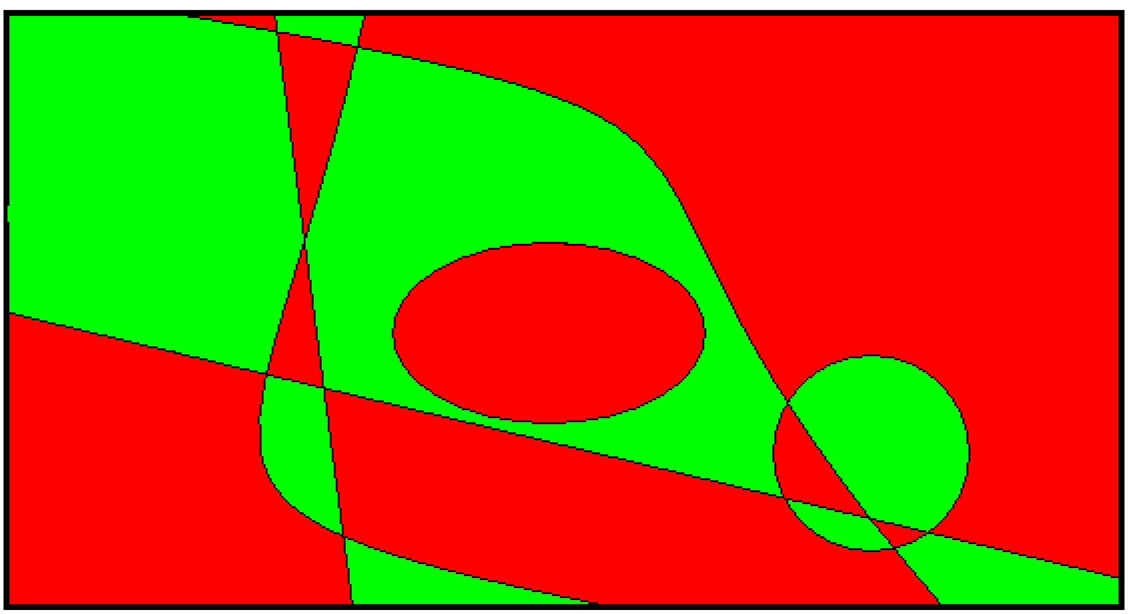
…e cambiare i colori…



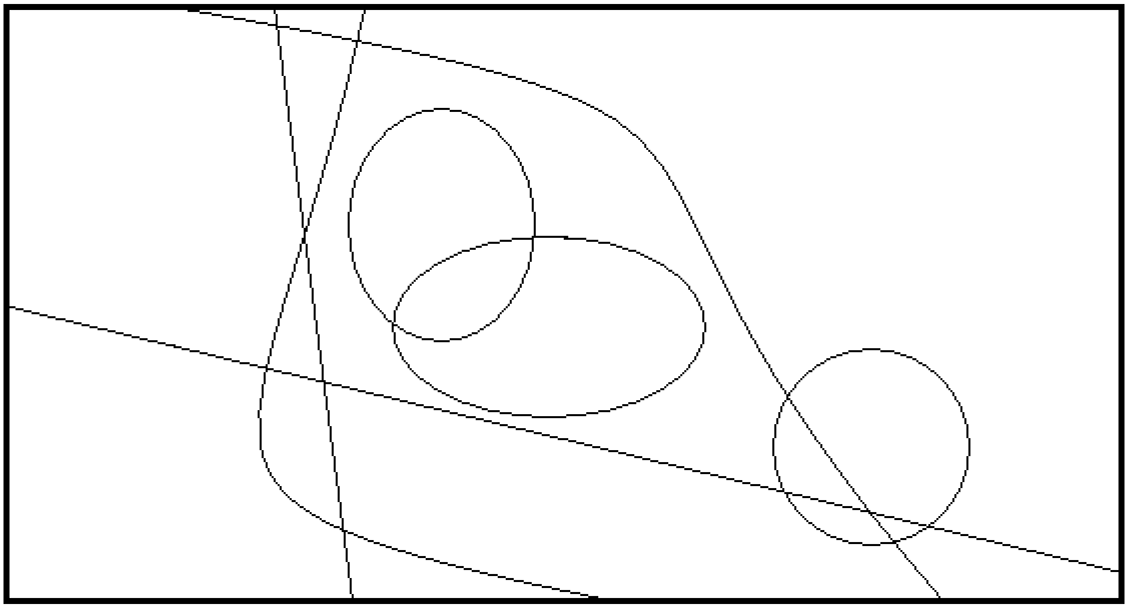
. . . aggiungere una linea. . .



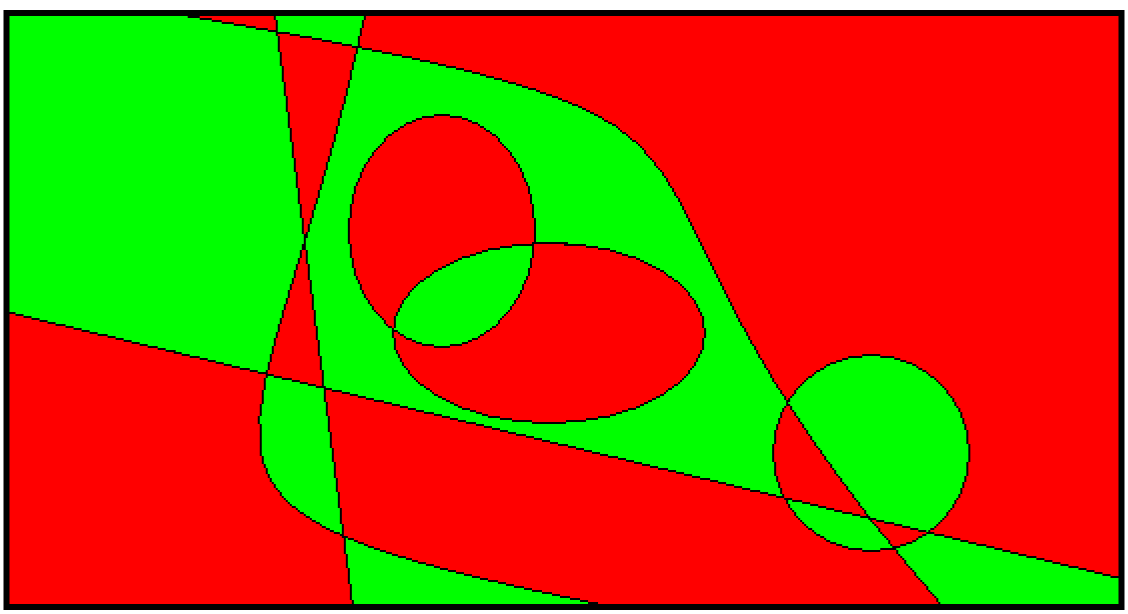
. . . e cambiare i colori. . .



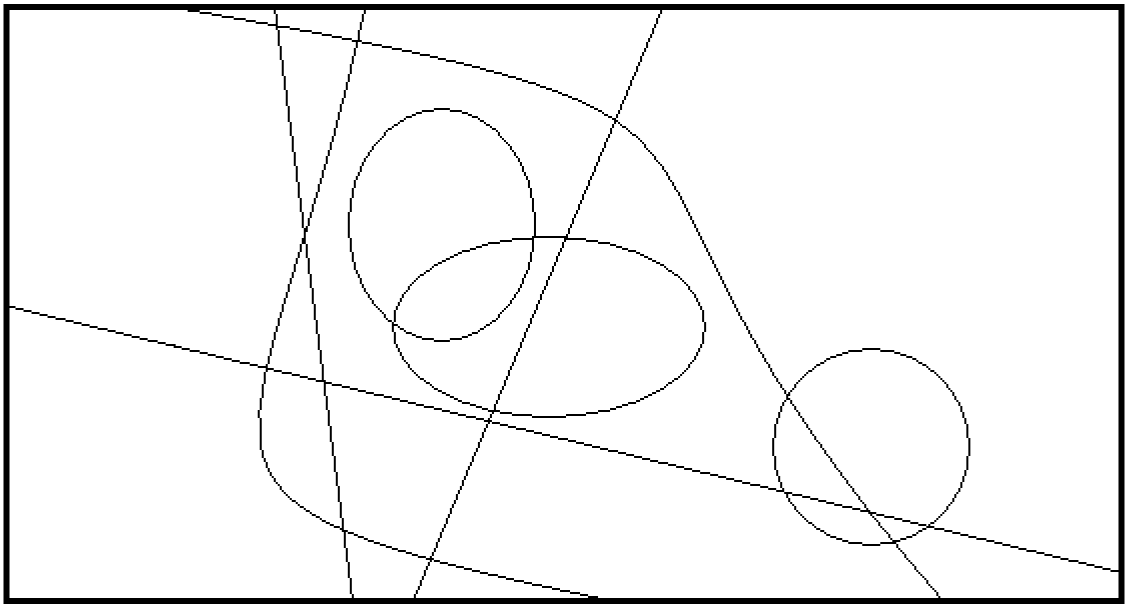
. . . aggiungere una linea. . .



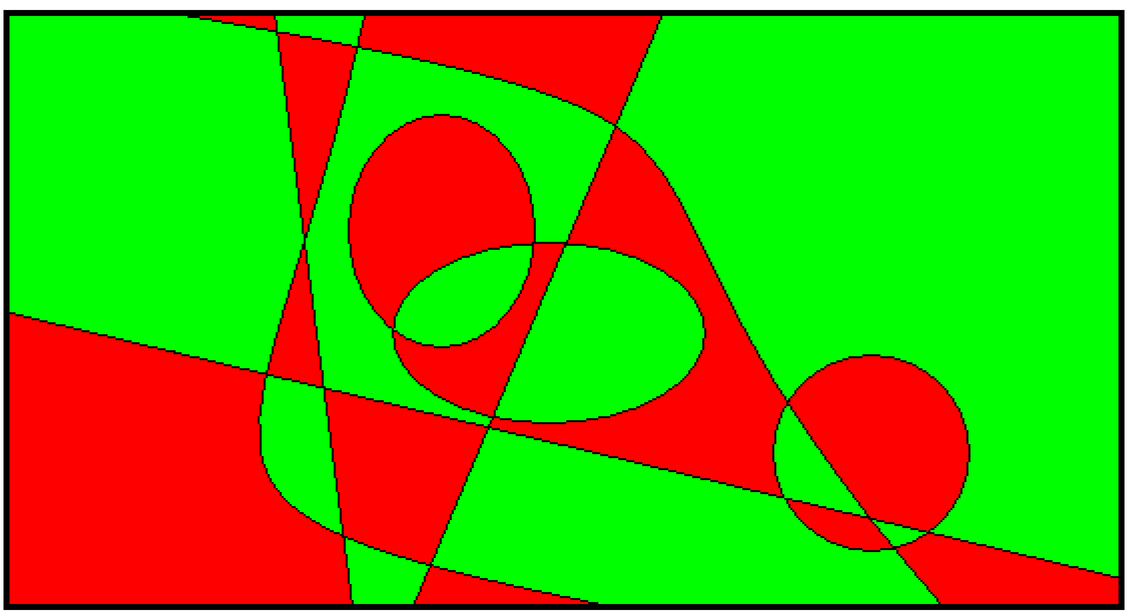
. . . e cambiare i colori. . .



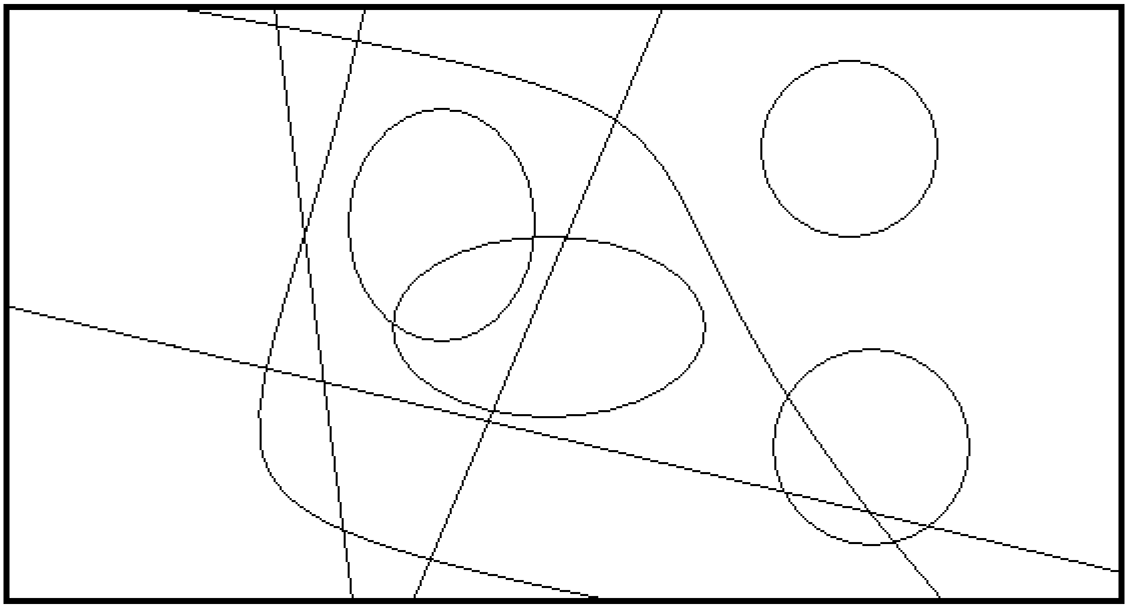
…aggiungere una linea…



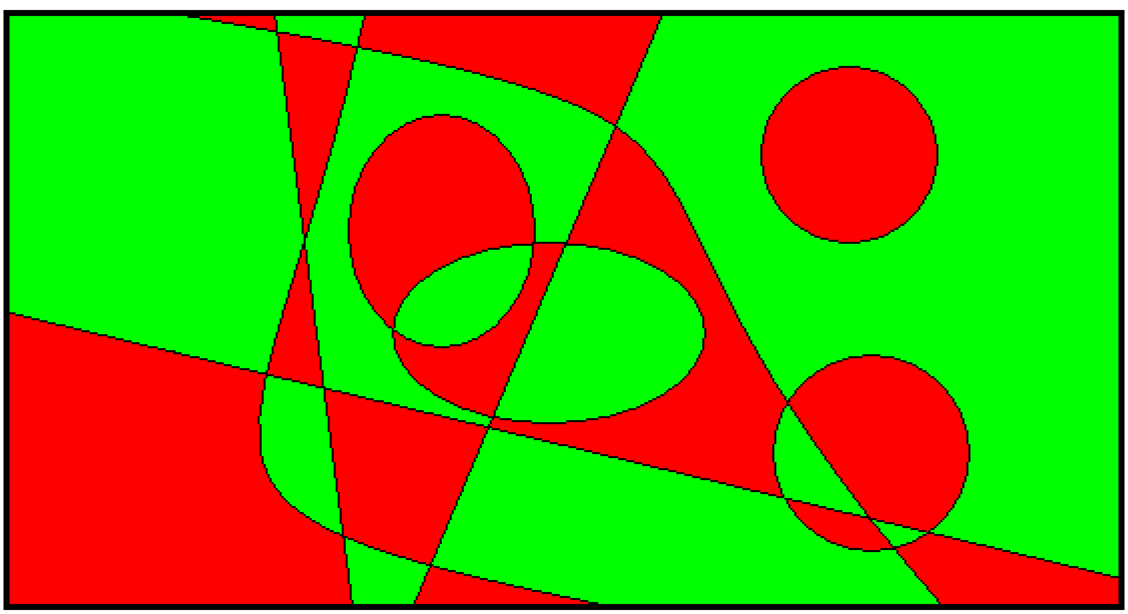
…e cambiare i colori…



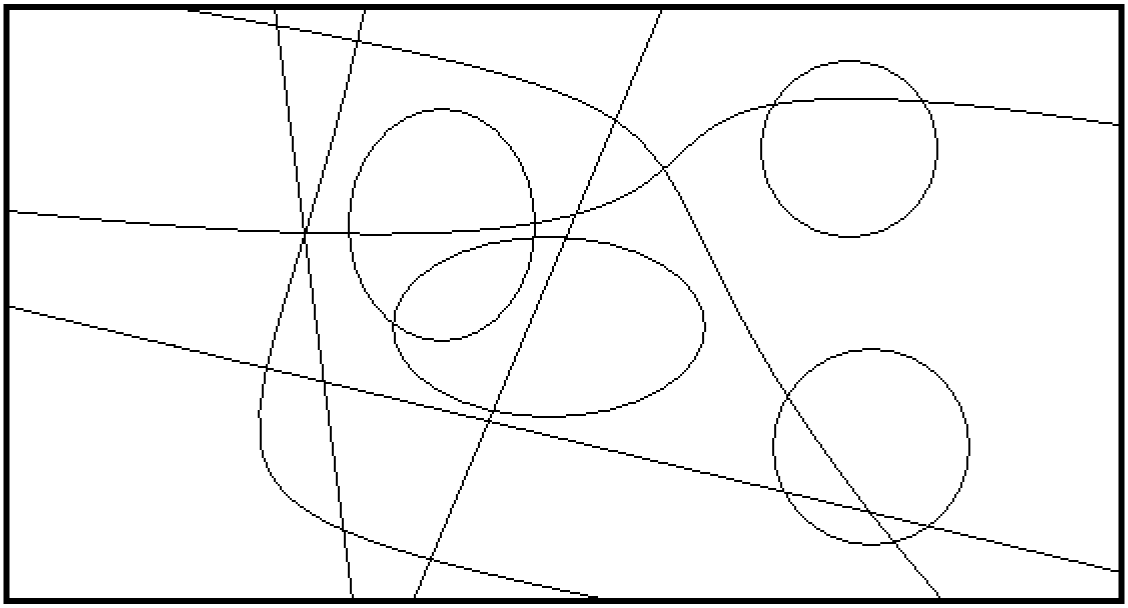
. . . aggiungere una linea. . .



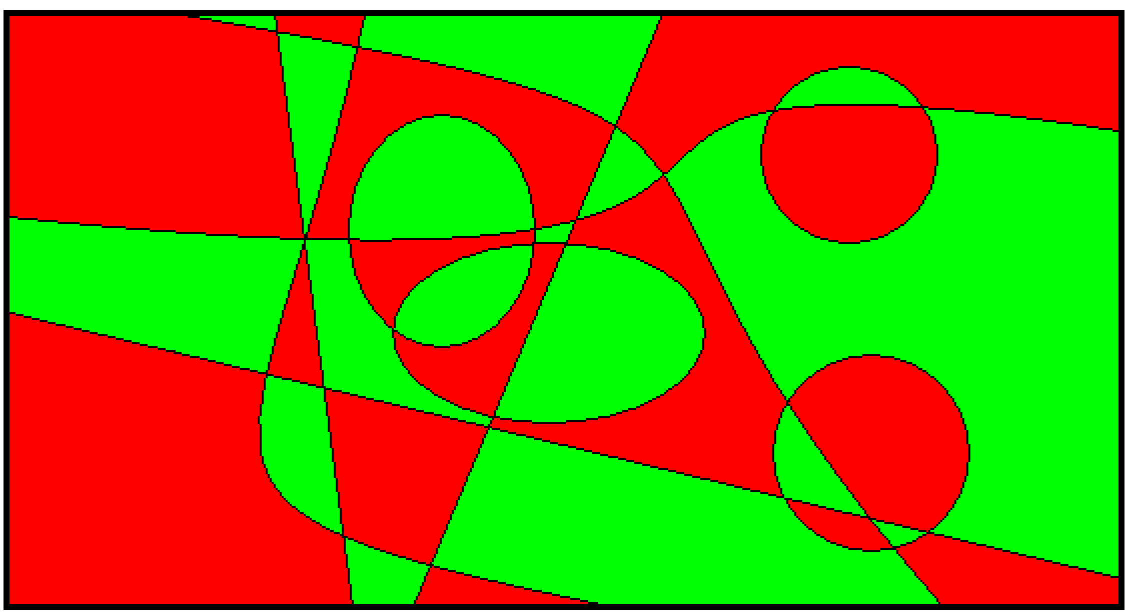
. . . e cambiare i colori. . .



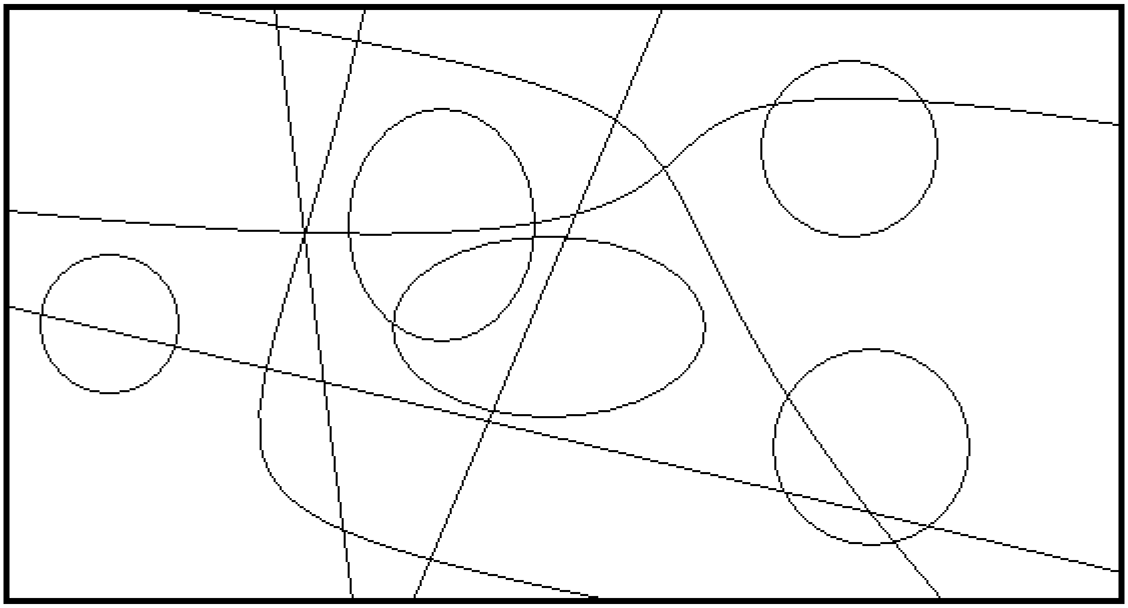
. . . aggiungere una linea. . .



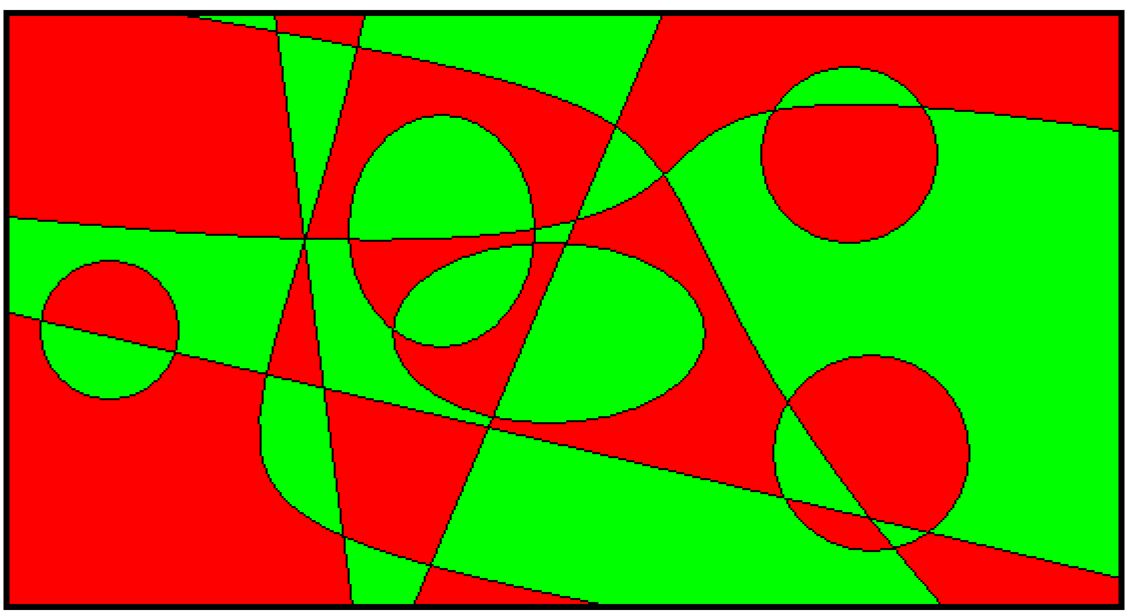
. . . e cambiare i colori. . .



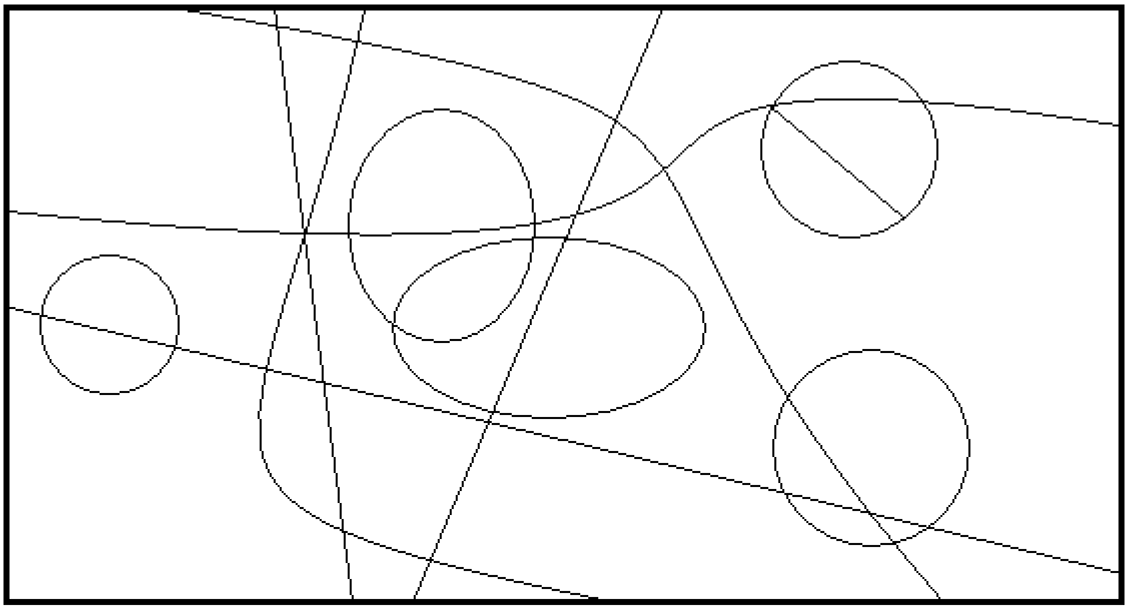
… finché non si aggiunge l’ultima linea, completando il disegno…



… e si ottiene, con l’ultimo cambio di colori, la colorazione desiderata!



Osservate ora che per una “buona colorazione” di questa carta geografica due colori non bastano:



La dimostrazione di questo fatto diventerà banale (beh, banale alla luce di quanto già abbiamo imparato sui grafi nelle lezioni precedenti!) dopo che avremo formalizzato il modi in cui si schematizza in teoria dei grafi il problema della colorazione delle carte geografiche.

Eh, sì, perché da un lato è certamente vero che le regioni di una carta geografica si possono sempre pensare come le facce di un (multi)grafo (senza orientamento) disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati (nel senso che siccome il grafo lo possiamo scegliere noi allora decidiamo che ovunque due linee si incontrano lì c’è un vertice del grafo… un modo francamente molto comodo per disegnare grafi nel piano senza sovrapposizione di lati, peccato però che non abbiamo nessun controllo sulla funzione di incidenza e quindi alla fin fine sulla struttura del grafo!). Ma dall’altro lato non abbiamo un modo standard per gestire il concetto di “facce confinanti”, mentre sappiamo dire molte cose (oddìo, molte cose… non esageriamo… qualcosina!) sull’idea di “adiacenza fra vertici” (alla fin fine è su questa idea, implementata mediante la funzione di incidenza, che si costruisce il concetto di grafo, no?).

Per cui i matematici hanno pensato di trovare un modo per “lèggere” il fatto che due facce di un grafo siano confinanti nell’adiacenza di due vertici in un altro grafo associato al precedente. Signore, e signori, vi presento a tale scopo il concetto di ***grafo duale*** di un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati!

Ad ogni grafo $\mathcal{G}$ senza orientamento disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati associamo un (multi)grafo (con cappi) $\mathcal{G}^*$ senza orientamento (detto *duale* di $\mathcal{G}$) disegnato nel piano come segue:

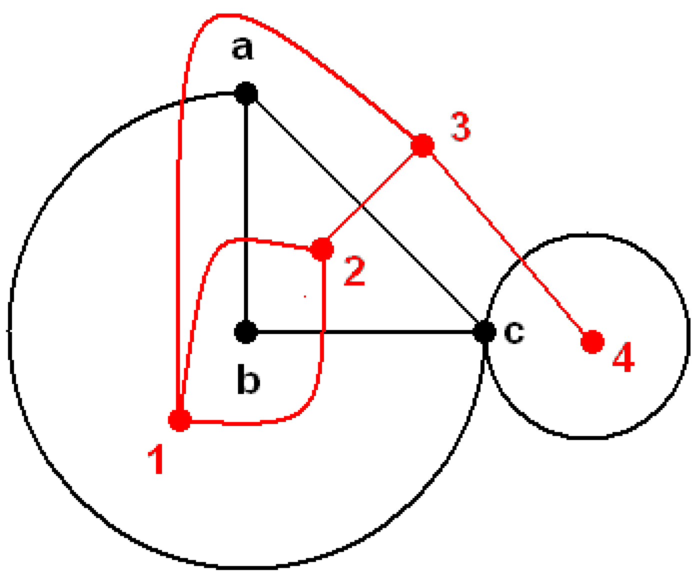
– per ogni faccia di $\mathcal{G}$ (interna o esterna) scegliamo un punto, che sarà un vertice di $\mathcal{G}^*$;

– per ogni linea di confine (compresa fra due vertici adiacenti di $\mathcal{G}$) fra due facce di $\mathcal{G}$, disegniamo attraverso di essa un arco di curva semplice che unisce i vertici di $\mathcal{G}^*$ corrispondenti a quelle due facce di $\mathcal{G}$: tale arco di curva semplice sarà un lato di $\mathcal{G}^*$.

Il (multi)grafo (con cappi) $\mathcal{G}^*$ così costruito non è ovviamente determinato in modo univoco, ma è facile convincersi che tutti i duali di $\mathcal{G}$ sono fra loro isomorfi. Inoltre, poiché $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati anche $\mathcal{G}^*$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati.

Esempio 7.2.1

Il grafo rosso (di vertici $1$, $2$, $3$, $4$) è duale del grafo nero (di vertici $a$, $b$, $c$).




Ma adesso riguardate il disegno, e chiedetevi: come è fatto il grafo duale del grafo disegnato in rosso (di vertici $1$, $2$, $3$, $4$)? Ebbene sì, è proprio evidente che tale grafo duale è il grafo disegnato in nero, quello di vertici vertici $a$, $b$, $c$!

La situazione vista nell’esempio 7.2.1 è del tutto generale. Vale infatti il seguente

Teorema 7.2.2

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento disegnato nel piano. Ogni grafo duale di qualsiasi grafo duale di $\mathcal{G}$ è isomorfo a $\mathcal{G}$.

*Dimostrazione* – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Nella prossima ora vedremo come il concetto di “grafo duale” possa venire utilizzato per applicare la teoria dei grafi al problema di colorazione delle carte geografiche. Nel frattempo, siccome non siete certamente obbligati a seguire le due ore di lezione di oggi 3 aprile 2020 una di seguito all’altra, potrete esercitarvi sul concetto di grafo duale svolgendo questo semplice esercizio, i cui risultati potrebbero in qualche misura sorprendervi:

Esercizio

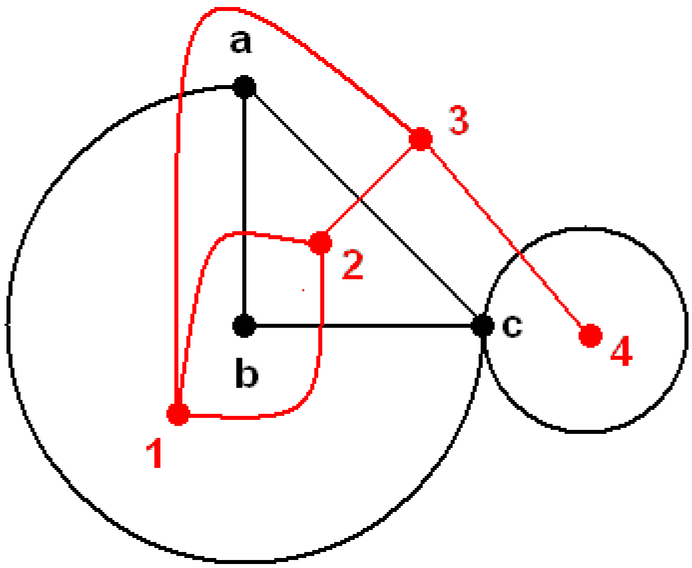
Per ciascuno dei grafi dei “solidi platonici” visti nella prima ora di martedì scorso 31 marzo 2020, disegnate il grafo duale.

Tale grafo duale è isomorfo a un grafo già incontrato nelle lezioni precedenti: a quale, precisamente?

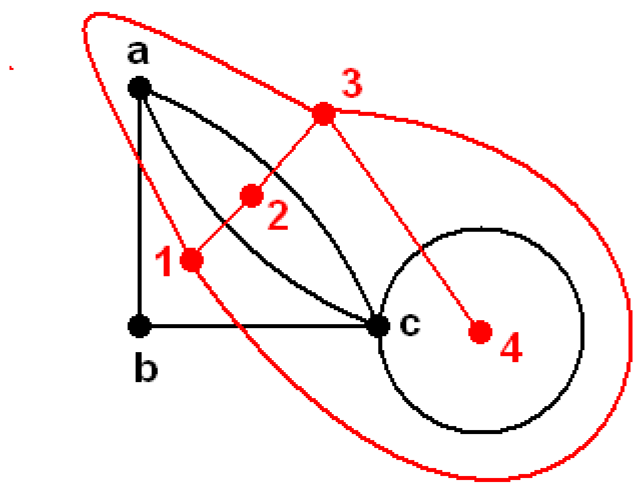
Terminiamo questa prima ora di lezione “virtuale” di oggi venerdì 3 aprile 2020 con una osservazione che non è importante per seguire le cose che vedremo nella prossima ora di lezione ma può aiutarvi a capire meglio il concetto di “grafo duale” (e a capire meglio, in qualche misura, fino a che punto due grafi isomorfi si possono identificare…).

Osservazione 7.2.3

Due duali di uno stesso grafo sono senz'altro isomorfi. Tuttavia, abbastanza sorprendentemente, grafi isomorfi possono avere duali non isomorfi. Sia $\mathcal{G}_1$ il seguente grafo (in nero)




e sia $\mathcal{G}_2$ il seguente grafo (sempre in nero, isomorfo a $\mathcal{G}_1$)




Nel duale di $\mathcal{G}_1$ (in rosso) ogni vertice ha grado al più $3$ (per la precisione: i vertici corrispondenti alle facce $1$, $2$ e $3$ hanno grado $3$ mentre il vertice corrispondente alla faccia $4$ ha grado $1$). Invece, nel duale di $\mathcal{G}_2$ (sempre in rosso) il vertice corrispondente alla faccia $3$ ha grado $4$ (mentre i vertici corrispondenti alle facce $4$, $2$ e $1$ hanno grado rispettivamente $1$, $2$ e $3$). Dunque il duale di $\mathcal{G}_1$ e il duale di $\mathcal{G}_2$ non sono isomorfi!