3 aprile 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di venerdì 3 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione "dal vivo". Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di "Teoria dei grafi" disponibili in rete nella pagina e-learning ("Moodle") di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Nella prima ora "virtuale" di lezione di oggi venerdì 3 aprile 2020 abbiamo introdotto il concetto di grafo duale di un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati. Vale la pena di ripetere questa definizione per trarne subito un paio di conseguenze significative.

Ad ogni grafo $\mathcal{G}$ senza orientamento disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati associamo un (multi)grafo (con cappi) $\mathcal{G}^*$ senza orientamento (detto *duale* di $\mathcal{G}$) disegnato nel piano come segue:

– per ogni faccia di $\mathcal{G}$ (interna o esterna) scegliamo un punto, che sarà un vertice di $\mathcal{G}^*$;

– per ogni linea di confine (compresa fra due vertici adiacenti di $\mathcal{G}$) fra due facce di $\mathcal{G}$, disegniamo attraverso di essa un arco di curva semplice che unisce i vertici di $\mathcal{G}^*$ corrispondenti a quelle due facce di $\mathcal{G}$: tale arco di curva semplice sarà un lato di $\mathcal{G}^*$.

Il (multi)grafo (con cappi) $\mathcal{G}^*$ così costruito non è ovviamente determinato in modo univoco, ma è facile convincersi che tutti i duali di $\mathcal{G}$ sono fra loro isomorfi. Inoltre, poiché $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati anche $\mathcal{G}^*$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati.

È molto importante che vi esercitiate a disegnare qualche duale, altrimenti non potete capire quello che vedremo nel seguito di questa lezione. Se non l'avete ancora fatto, vi suggerisco di svolgere questo esercizio che vi avevo assegnato alla fine della precedente ora:

Esercizio

Per ciascuno dei grafi dei “solidi platonici” visti nella prima ora di martedì scorso 31 marzo 2020, disegnate il grafo duale.

Se proprio siete tanto ma tanto pigri, fate almeno il disegno del grafo duale per i tre solidi più “semplici”, cioè il tetraedro, l’esaedro e l’ottaedro! E non fate i furbi, tanto non avrete modo di sbirciare la soluzione nella prossima lezione, perché questa è l’***ultima volta*** che parliamo di grafi e la soluzione non ve la do. Al massimo, se avete dei dubbi, potete mandarmi il vostro svolgimento dell’esercizio al mio indirizzo email

marco.barlotti@unifi.it

e io vi risponderò dicendo se avete fatto giusto oppure avete sbagliato qualcosa!

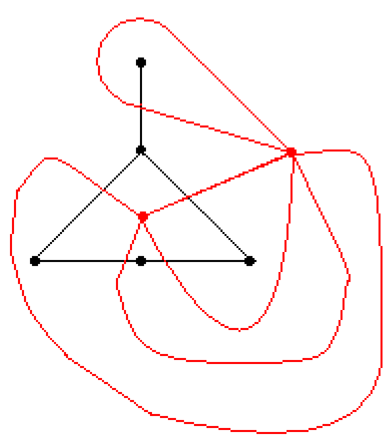
Ma insomma, adesso torniamo al concetto di grafo duale. Se $\mathcal{G}$ è un (multi)grafo senza orientamento disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, il suo duale $\mathcal{G}^*$ è un multi grafo senza orientamento

– anche lui disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati

e

– tale che due vertici di $\mathcal{G}^*$ sono adiacenti se e soltanto se corrispondono a due facce “confinanti” di $\mathcal{G}$ (cioè due facce di $\mathcal{G}$ che hanno almeno un lato del bordo in comune).

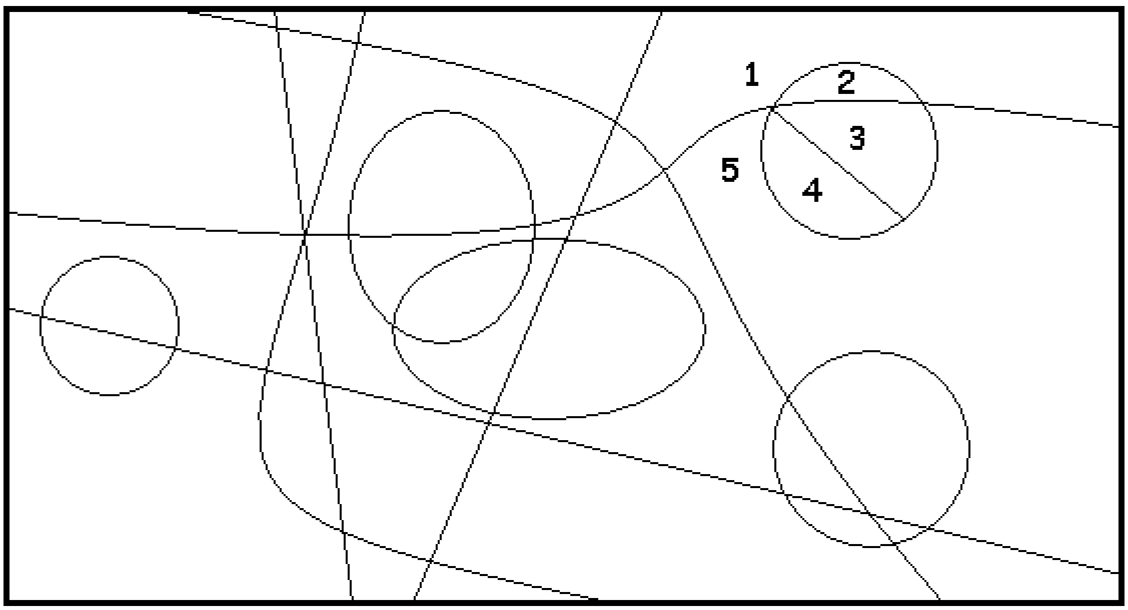
Notate che anche se $\mathcal{G}$ è un grafo semplice e senza cappi il suo duale $\mathcal{G}^*$ può avere sia cappi che lati paralleli:



Il grafo nero è un onesto grafo semplice con 5 vertici (uno dei quali è una foglia), senza cappi né lati paralleli. Il grafo rosso, che è il suo duale, consta di soli 2 vertici ma è un multigrafo con quattro lati paralleli e un cappio!

Adesso capite perché è davvero banale dimostrare l’affermazione che ho buttato lì nella prima ora quando dicevo che non è possibile suddividere una porzione di piano in cinque regioni ciascuna delle quali sia confinante con le altre quattro: in fatti una tale ipotetica suddivisione corrisponderebbe a un grafo il cui duale è il grafo completo $\mathcal{K}_5$ disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati!

Non solo, adesso diventa banale anche dimostrare che per una buona colorazione di questa carta geografica non bastano due colori:



Infatti, ogni “buona colorazione” delle facce di un grafo $\mathcal{G}$ corrisponde a una “buona colorazione” dei vertici del suo duale (cioè una colorazione dei vertici per la quale comunque si prendano due vertici adiacenti essi non hanno lo stesso colore). Ma una “buona colorazione” (nel senso appena visto) dei vertici di un grafo equivale a una partizione dell’insieme dei vertici in due sottoinsiemi tali che non esistano vertici nello stesso sottoinsieme che siano adiacenti; in altre parole: esiste una “buona colorazione” dei vertici di un grafo con due soli colori se e soltanto se il grafo è bipartito! Ora, il grafo duale di quello le cui facce sono le regioni del disegno sopra riportato non è bipartito perché in esso c’è il ciclo $1-2-3-4-5-1$ di lunghezza dispari (ricordate il teorema 2.3.1?).

Formalizziamo quanto detto sopra con qualche opportuna definizione:

Sia $\mathcal{C}$ ($:= \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$) un insieme finito (i cui elementi sono detti *colori*).

Se $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ è un grafo senza orientamento, si dice *colorazione dei vertici* di $\mathcal{G}$ una qualsiasi funzione $\mathcal{V} \to \mathcal{C}$. Una colorazione dei vertici di $\mathcal{G}$ si dice una *buona colorazione* se a vertici adiacenti assegna colori diversi.

Teorema 7.3.1

Sia n un numero intero positivo. Sono fatti equivalenti:

(a) ogni grafo piano ammette una buona colorazione dei vertici con al più n colori;

(b) ogni carta geografica nel piano si può colorare con al più n colori in modo che a regioni confinanti restino assegnati colori diversi.

Dimostrazione – Supponiamo che valga la (a). Sia $\mathcal{C}$ una carta geografica nel piano, e sia $\mathcal{G}_0$ il grafo associato a $\mathcal{C}$: allora $\mathcal{G}_0$ è un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, e tale è anche un suo qualsiasi duale $\mathcal{D}$, nel quale vertici adiacenti corrispondono a regioni confinanti di $\mathcal{C}$. Per la (a), esiste una buona colorazione dei vertici di $\mathcal{D}$ con $m \leq n$ colori che può essere interpretata come una colorazione di $\mathcal{C}$ con gli stessi m colori, nella quale a regioni confinanti restano assegnati colori diversi.

Viceversa, supponiamo che valga la (b). Sia $\mathcal{G}$ un grafo piano, che possiamo supporre disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, e sia $\mathcal{D}$ un suo duale: come si è osservato nella sez. 7.2, anche $\mathcal{D}$ è un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, quindi possiamo considerare la carta geografica $\mathcal{C}$ le cui regioni sono le facce di $\mathcal{D}$: per la (b), tali regioni possono essere colorate con $m \leq n$ colori in modo che a regioni confinanti restino associati colori diversi. Ma tale colorazione delle regioni di $\mathcal{C}$, cioè della facce di $\mathcal{D}$, dà luogo ad una buona colorazione dei vertici di ogni duale di $\mathcal{D}$; e poiché qualsiasi duale di $\mathcal{D}$ è isomorfo a $\mathcal{G}$ (per il teorema 7.2.2) si è provato che $\mathcal{G}$ ammette una buona colorazione dei vertici con $m \leq n$ colori.

Con gli strumenti teorici che abbiamo introdotto possiamo “riadattare” una antica dimostrazione *sbagliata* del fatto che ogni carta geografica nel piano ammetta una “buona colorazione” con 4 colori per dare un dimostrazione *corretta* che 5 colori bastano.

In effetti, i matematici sono ormai convinti che 4 sia davvero il numero giusto e che il giovane Francis Guthrie avesse ragione: nel 1976 infatti lo statunitense Kenneth Appel (1932 – 2013) e il tedesco Wolfgang Haken (1928 – vivente) hanno ricondotto la dimostrazione di questo fatto a un alto, ma finito, elenco di casi particolari che sono stati poi uno a uno controllati con un elaboratore elettronico.

Teorema 7.3.2

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento disegnato nel piano. Esiste una buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}$ con al più 5 colori.

Dimostrazione – Procediamo per induzione sul numero dei vertici di $\mathcal{G}$. Possiamo supporre che $\mathcal{G}$ sia semplice e senza cappi; dunque, per il corollario 4.2.5 esiste un vertice v_0 di $\mathcal{G}$ di grado al più 5.

Sia $\mathcal{G}_0$ il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ sopprimendo v_0 e tutti i lati (al più 5) incidenti v_0. Per l'ipotesi di induzione, esiste una buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}_0$ con al più 5 colori. Siano $v_1, v_2, \dots, v_s$ i vertici adiacenti a v_0 in $\mathcal{G}$: se $s < 5$ o se comunque la buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}_0$ assegna a $v_1, v_2, \dots, v_s$ meno di 5 colori, possiamo assegnare il quinto colore a v_0 e ottenere così dalla buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}_0$ una buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}$: in questo caso non c'è altro da dimostrare.

Resta da considerare il caso in cui $s = 5$ e la buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}_0$ assegna a $v_1, v_2, \dots, v_5$ cinque colori distinti $c_1, c_2, \dots, c_5$. Supponiamo che i cinque lati di $\mathcal{G}$ che hanno primo estremo in v_0 e secondo estremo in $v_1, v_2, \dots, v_5$ si susseguano proprio in quest'ordine in senso orario.

Sia $\mathcal{G}_{1,3}$ il sottografo di $\mathcal{G}$ indotto dai vertici colorati con c_1 e c_3, e sia $\mathcal{G}^*_{1,3}$ la componente connessa di $\mathcal{G}_{1,3}$ a cui appartiene v_1. Se v_3 non è un vertice di $\mathcal{G}^*_{1,3}$, scambiando fra loro i colori c_1 e c_3 in tutti i vertici di $\mathcal{G}^*_{1,3}$ si ottiene ancora una buona colorazione di $\mathcal{G}_0$ nella quale però questa volta per i vertici $v_1, v_2, \dots, v_5$ si usano soltanto i colori c_2, c_3, c_4 e c_5 (infatti dopo lo scambio dei colori c_1 e c_3 al vertice v_1 resta assegnato il colore c_3); assegnando a v_0 il colore c_1 si ottiene dunque una buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}$ con i colori $c_1, c_2, \dots, c_5$.

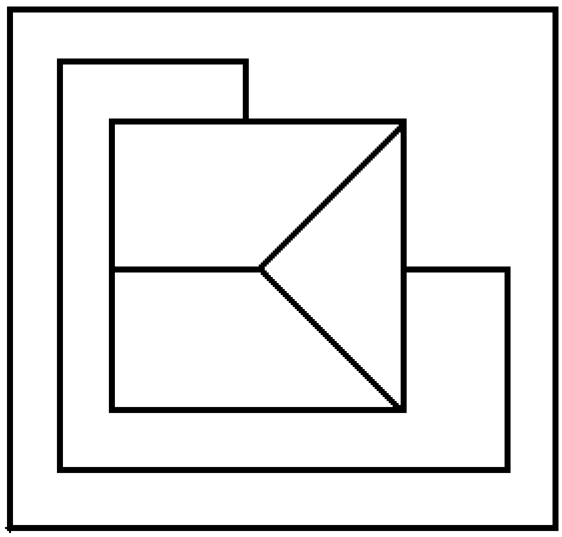
Resta da considerare il caso in cui v_3 è un vertice di $\mathcal{G}^*_{1,3}$. In questo caso (per il teorema 2.1.2) c'è in $\mathcal{G}^*_{1,3}$ (e quindi in $\mathcal{G}_0$) un cammino semplice di estremi v_1 e v_3 i cui vertici sono colorati soltanto con c_1 e c_3; considerando anche i lati di estremi $\{v_0, v_1\}$ e $\{v_0, v_3\}$ si trova in $\mathcal{G}$ un ciclo i cui vertici (a parte v_0) sono colorati soltanto con c_1 e c_3: il vertice v_2 è interno a tale ciclo, mentre il vertice v_4 è esterno a tale ciclo.

Sia allora $\mathcal{G}_{2,4}$ il sottografo di $\mathcal{G}$ indotto dai vertici colorati con c_2 e c_4, e sia $\mathcal{G}^*_{2,4}$ la componente connessa di $\mathcal{G}_{2,4}$ a cui appartiene v_2. Il vertice v_4 non può essere un vertice di $\mathcal{G}^*_{2,4}$, perché non ci può essere un cammino semplice di estremi $\{v_2, v_4\}$ i cui vertici sono colorati soltanto con c_2 e c_4: infatti, come si è osservato nel paragrafo precedente, v_2 è interno e v_4 è esterno a un ciclo i cui vertici (a parte v_0) sono colorati soltanto con c_1 e c_3.

Poiché v_4 non può essere un vertice di $\mathcal{G}^*_{2,4}$, scambiando fra loro i colori c_2 e c_4 in tutti i vertici di $\mathcal{G}^*_{2,4}$ si ottiene ancora una buona colorazione di $\mathcal{G}_0$ nella quale però questa volta per i vertici $v_1, v_2, \dots, v_5$ si usano soltanto i colori c_1, c_3, c_4 e c_5 (infatti dopo lo scambio dei colori c_2 e c_4 al vertice v_2 resta assegnato il colore c_4); assegnando a v_0 il colore c_2 si ottiene dunque una buona colorazione dei vertici di $\mathcal{G}$ con i colori $c_1, c_2, \dots, c_5$, come si voleva dimostrare.

Esercizio 7.3.3

Qual è il minimo numero di colori con i quali si possono colorare le regioni della seguente carta geografica in modo che a regioni confinanti restino assegnati colori diversi?



E infine, un quesito per vedere quanto avete capito delle cose “dette” (in realtà, ahimé, *scritte*) sulla teoria dei grafi. Leonhard Euler ha considerato i grafi per i quali esiste un circuito che comprenda tutti i lati. William Hamilton ha considerato i grafi per i quali esiste un ciclo che comprenda tutti i vertici. Nel primo caso, sostanzialmente, si percorrono tutti i lati una e una sola volta per tornare al punto di partenza, nel secondo caso si percorrono tutti i vertici una e una sola volta per tornare al punto di partenza. Ma perché non organizzare un bel giro anche *sulle facce di un grafo piano*?

Diciamo che un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati è *barlottiano* se è possibile partire da una faccia f_0 e percorrerle tutte una e una sola volta, passando ogni volta da una faccia a una faccia ad essa confinante, concludendo infine l’itinerario sulla faccia f_0 dalla quale eravamo partiti.

Secondo voi perché questo concetto non è mai stato introdotto e studiato? Il motivo dovrebbe esservi ovvio, ma non lo troverete scritto da nessuna parte. Se volete pensarci e poi mandarmi una email, volentieri vi risponderò per dirvi se sono d’accordo con voi. Altrimenti, l’appuntamento è alla prossima lezione nella quale parleremo nuovamente di ***logica matematica***.