

DEFINIZIONE DI SPETTRO DI RISPOSTA

L'analisi completa della risposta di una struttura ad un sisma descritto mediante accelerogrammi risulta estremamente onerosa e richiede in ogni caso l'impiego di algoritmi implementati su elaboratori elettronici. In relazione a necessità progettuali, inoltre, l'aleatorietà delle caratteristiche dei terremoti che in futuro possono colpire il sito da edificare renderebbe poco significativa l'analisi rispetto ad un solo accelerogramma, anche se si disponesse dell'accelerogramma registrato in epoche passate nello stesso sito od a poca distanza da esso. Una verifica di sicurezza richiederebbe dunque l'analisi della struttura soggetta a diversi accelerogrammi con caratteristiche corrispondenti a quelle dei possibili futuri terremoti (le NTC2008 impongono l'uso di una famiglia di sette storie di accelerazione per ogni direzione del moto – §7.3.5). Il problema di progetto e di verifica della sicurezza viene ulteriormente complicato dalla possibilità che la struttura superi il limite di elasticità e si comporti come un sistema non lineare durante i terremoti più violenti; sarebbe dunque necessario operare mediante analisi dinamiche non lineari, con conseguente aggravio dell'onere computazionale e delle competenze richieste al progettista. Per ovviare a tutti i problemi finora esposti è di grande aiuto l'uso di quelli che nel seguito verranno definiti come spettri di risposta elastici, spettri di risposta non lineari e spettri di progetto.

- *Definizione di spettro di risposta elastico*

La conoscenza della risposta della struttura istante per istante è superflua ai fini progettuali, interessando in realtà solamente il valore massimo e le relative sollecitazioni. Una rappresentazione che fornisca direttamente tale valore per oscillatori con qualsiasi periodo e qualsiasi smorzamento risolverebbe in maniera semplice e diretta il problema in situazioni di comportamento elastico lineare.

Essa si presenta sotto forma di grafico ed è denominata "spettro di risposta elastico". Si ottiene da un dato accelerogramma calcolando, una volta per tutte, la risposta massima di oscillatori semplici con periodo proprio T compreso nel campo di variazione delle strutture reali ($0 \div 4$ s) e riportandole in un diagramma che abbia in ascisse il periodo T , o la frequenza $f=1/T$, ed in ordinata tale valore massimo. La risposta è generalmente calcolata in termini di spostamento per diversi valori dello smorzamento scelti anch'essi entro il campo di variazione delle strutture reali ($0 \div 20\%$). Si ottengono così gli spettri di risposta degli spostamenti relativi, indicati nel seguito con il simbolo S_D .

Moltiplicando gli spostamenti spettrali per ω e per ω^2 si ottengono rispettivamente gli spettri delle "pseudo-velocità", $S_V=\omega S_D$, e delle "pseudo-accelerazioni", $S_A=\omega^2 S_D$, che forniscono con buona approssimazione i valori massimi della risposta dell'oscillatore in termini di velocità relative ed accelerazioni assolute.

Il perché del prefisso "pseudo" alle definizioni di spettri di velocità relativa e di accelerazione assoluta è comprensibile dalle considerazioni di seguito esposte.

Come visto nella parte dedicata all'analisi dinamica nel dominio del tempo di oscillatori semplici soggetti a forzanti qualsiasi, nella soluzione generale il contributo più importante alla risposta è quello legato alla sua fase di risposta a regime (ovvero alla soluzione particolare dell'equazione non omogenea rappresentativa del moto del sistema), definita mediante l'integrale di Duhamel. Nel caso di azione esterna di tipo sismico, lo stesso integrale assume la seguente espressione:

$$x_p(t) = -\frac{1}{\omega_{1d}} \int_0^t e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin \omega_{1d}(t-\tau) a_g(\tau) d\tau \quad (1)$$

Derivando la (1) due volte si ottiene:

$$v_p(t) = -\int_0^t e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \cos \omega_{1d}(t-\tau) a_g(\tau) d\tau - \xi\omega_1 x_p(t) \quad (2)$$

$$a_p(t) = -a_g(t) - 2\xi\omega_1 v_p(t) - \omega_1^2 x_p(t) \quad (3)$$

Dalla (3) può essere esplicitata come segue l'espressione dell'accelerazione assoluta che più interessa ai fini della definizione dell'azione inerziale agente sulla struttura in caso di sisma:

$$a_t(t) = a_p(t) + a_g(t) = -[2\xi\omega_1 v_p(t) + \omega_1^2 x_p(t)] \quad (4)$$

Relativamente ai sistemi debolmente smorzati (ovvero caratterizzati da percentuali ξ non superiori al 28%, come verrà ribadito dalla limitazione della NTC2008 e della NTC2018 sul parametro η - § 3.2.3.2.1) sono possibili le seguenti approssimazioni e generalizzazioni ($\omega_1 = \omega$):

$$\omega_{1d} = \omega_1 \sqrt{1 - \xi^2} = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\xi\omega_1 x_p(t) = \xi\omega x_p(t) \cong 0$$

$$\xi\omega_1 v_p(t) = \xi\omega v_p(t) \cong 0$$

Essendo inoltre circa uguali l'energia totale del sistema negli istanti di massimo spostamento e massima velocità si può ammettere:

$$S_D = \max |x_p(t)| \quad (5)$$

$$S_V = \max |v_p(t)| \cong \omega S_D \quad (6)$$

$$S_A = \max |a_t(t)| \cong \omega^2 S_D \quad (7)$$

Le approssimazioni sono migliori in termini di accelerazione di quanto non risulti per le velocità.

La definizione di pseudo-accelerazione è molto utile nella valutazione delle sollecitazioni di una struttura poiché, moltiplicata per la massa, fornisce direttamente l'aliquota della forza d'inerzia che viene equilibrata dalla forza di richiamo elastico; infatti si ha:

$$mS_A = m\omega^2 S_D = m(k/m)S_D = kS_D \quad (8)$$

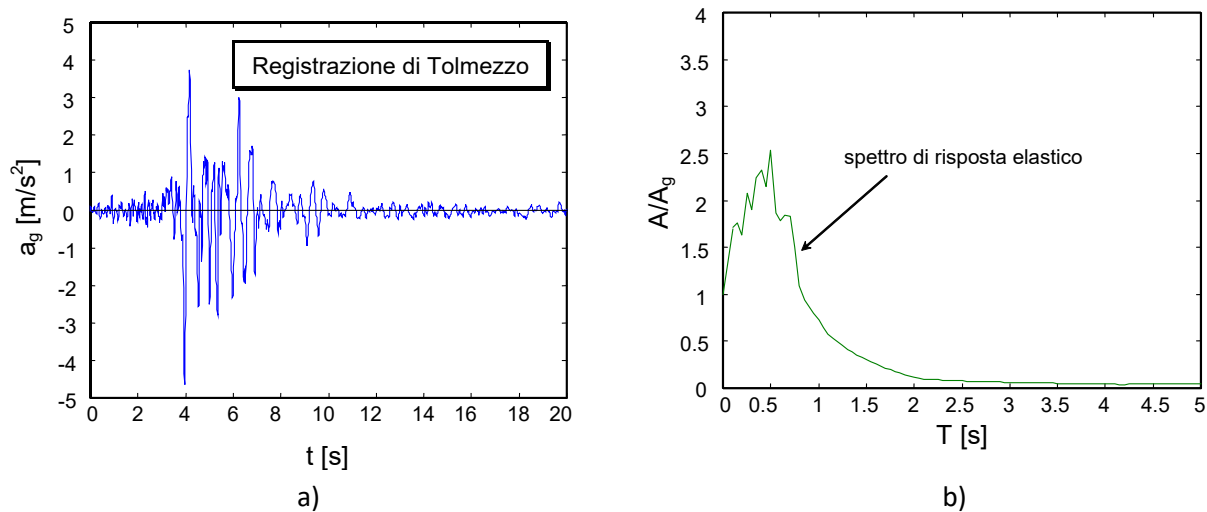


Figura 1 – a) Registrazione del Terremoto di Tolmezzo del 6/5/1976; b) spettro di risposta relativo ad uno smorzamento del 5% ottenuto dallo stesso segnale sismico reale

In Figura 2 viene mostrato l'andamento qualitativo dei tre spettri di risposta desumibili da uno stesso accelerogramma. Dai grafici in essa riportati si evince come i massimi amplificativi si verifichino in corrispondenza di intervalli di periodi adiacenti, mai coincidenti.

Tenendo conto del fatto che, ai fini progettuali, ciò che interessa maggiormente sono proprio i valori massimi assunti dalle tre grandezze S_A , S_V ed S_D , risulta di particolare interesse la rappresentazione spettrale originalmente proposta da Newmark ed Hall su di una carta tetralogarithmica. Secondo tale forma di rappresentazione i tre spettri devono essere tracciati su una carta con quattro scale logaritmiche: in ascissa $\log\omega$ (od equivalentemente $\log T$), sull'ordinata verticale $\log S_V$ e nelle ordinate a -45° e $+45^\circ$ $\log S_D$ e $\log S_A$ (viceversa nel caso di $\log T$ in ascisse).

Tutti i punti di questa carta godono della proprietà:

$$\log S_V = \log S_D + \log \omega$$

$$\log S_V = \text{Log} S_A - \log \omega$$

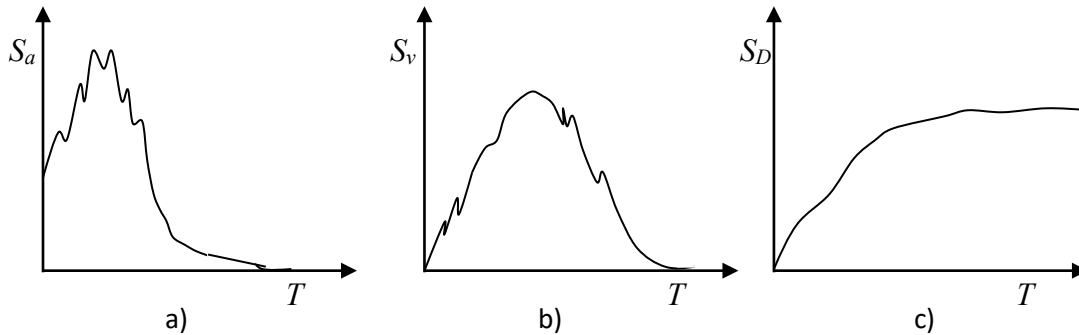


Figura 2 – Spettro di risposta di pseudo-accelerazione (a), di pseudo-velocità (b) e di spostamento (c)

Attraverso semplici regole, la carta tetralogarithmica permette inoltre la costruzione di spettri approssimati dei terremoti di tipo “far fault”, ovvero con contenuto spettrale in frequenza più ampio. Il tracciamento di tali curve avviene secondo i seguenti passi procedurali:

1. si tracciano le linee ortogonali ai rispettivi assi di riferimento dei valori di picco a_g dell’accelerazione (Maximum Ground Acceleration), v_g della velocità (Maximum Ground Velocity), d_g dello spostamento (Maximum Ground Displacement). Queste linee s’intersecano nei punti P_{AV} e P_{VD} le cui ascisse corrispondono ai periodi T_{AV} e T_{VD} di seguito definiti:

$$T_{AV} = 2\pi v_g / a_g$$

$$T_{VD} = 2\pi d_g / v_g$$

2. Il passaggio da questi diagrammi alle curve spettrali di risposta di oscillatori con date percentuali di smorzamento avviene sulla base della conoscenza di fattori amplificativi massimi in termini di accelerazione α_a , di velocità α_v , e di spostamento α_d . In Tabella 1 vengono riportati i valori di tali coefficienti ottenuti da Newmark ed Hall per una serie di terremoti registrati sul territorio americano. Si tracciano quindi sulla stessa carta tetralogarithmica linee parallele alle rette $a_g = \text{cost.}$, $v_g = \text{cost.}$, $d_g = \text{cost.}$, con ordinate rispettivamente pari ad $\alpha_a a_g$, $\alpha_v v_g$, ed $\alpha_d d_g$.
3. Essendo noto che per T molto piccolo (strutture molto rigide) le accelerazioni, e per T molto grande (strutture molto deformabili) gli spostamenti dell’oscillatore semplice tendono a coincidere con le corrispondenti grandezze del moto del terreno, potrà essere conclusivamente tracciata la curva involucro dei massimi valori spettrali caratterizzanti il sistema di oscillatori dinamici esaminati. Partendo dalla parte delle accelerazioni e proseguendo verso gli spostamenti

essa risulterà quindi successivamente tangente alle rette a_g , $\alpha_a a_g$, $\alpha_v v_g$, $\alpha_d d_g$ e d_g (Figura 3).

Tabella 1 – Dati amplificativi desunti da Newmark e Hall per i terremoti americani (in grassetto i dati relativi ad uno smorzamento del 5%)

ξ (%)	α_a	α_v	α_d
0	6,4	4,0	2,5
0,5	5,8	3,6	2,2
1	5,2	3,2	2,0
2	4,3	2,8	1,8
5	2,6	1,9	1,4
7	1,9	1,5	1,2
10	1,5	1,3	1,0

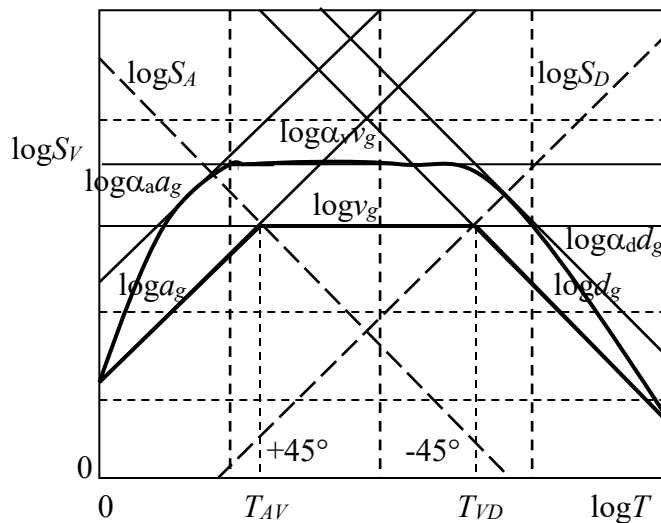


Figura 3 – Rappresentazione spettrale sulla carta tetralogarithmica

Un'altra rappresentazione delle curve spettrali di risposta è quella che vede riportati in un unico diagramma i valori di S_A , in ordinate, ed S_D in ascisse. Il grafico che si ottiene viene denominato "spettro di risposta ADRS" (dall'acronimo di Acceleration-Displacement Response Spectrum). In esso le rette che escono dall'origine ed incontrano la curva in un punto di coordinate $[S_D(T_i), S_A(T_i)]$, corrispondenti ad un dato periodo T_i della struttura, hanno pendenza definita dalla relazione:

$$\omega_i^2 = S_A(T_i) / S_D(T_i)$$

ovvero dal quadrato della pulsazione naturale dell'oscillatore (Figura 4). Dalla lettura di questo diagramma è possibile stabilire se, in campo elastico, una struttura risulti

verificata nei confronti dell'azione sismica. Se ne consideri, ad esempio, una con periodo T_1 tale da poter assorbire un'azione di taglio alla base al massimo pari a $V_{1,max}$ corrispondente ad un'accelerazione $a_{1,max}$ e ad uno spostamento $d_{1,max}$. Se il punto è interno al dominio "obiettivo" si può affermare che la struttura non soddisfa i requisiti di prestazione richiesti, cosa che invece si ha per la struttura due, caratterizzata da un periodo T_2 e da una coppia di coordinate $a_{2,max}$ e $d_{2,max}$, esterne al dominio.

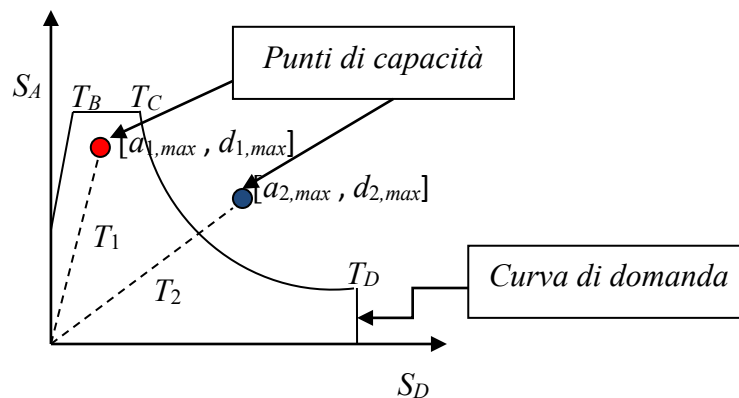


Figura 4 – Rappresentazione ADRS dello spettro elastico