

## Limiti di funzioni di più variabili

• Per le funzioni reali di più variabili reali valgono teoremi analoghi a quelli già visti nel caso di una variabile reale. Con le opportune modifiche valgono infatti i seguenti risultati:

1. Teoremi sulle operazioni tra limiti;
2. Teorema di unicità del limite;
3. Teorema della permanenza del segno;
4. Teorema dei carabinieri.

• Diremo che una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  è limitata (limitata superiormente, limitata inferiormente) se lo è le sue immagini. Si può provare che  $f: A \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  è limitata  $\Leftrightarrow \exists M > 0$  tale che  $|f(p)| \leq M \forall p \in A$ .

• Corollario (del Teorema dei carabinieri).

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali definite su un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{K}^n$ . Supponiamo che  $f$  sia limitata e che  $g(p) \rightarrow 0$  per  $p \rightarrow p_0$  ( $p_0$  è accumulazione per  $A$ ). Allora  $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p)g(p) = 0$ .

Dimostrazione

visto che  $f$  è limitata  $\Rightarrow \exists M > 0$  tale che  $|f(p)| < M \forall p \in A$ . si ha che:  $0 \leq |f(p)g(p)| \leq M|g(p)|$   
e visto che  $M|g(p)| \rightarrow 0$  per  $p \rightarrow p_0$ , per il teorema dei carabinieri onde  $|f(p)g(p)| \rightarrow 0$  per  $p \rightarrow p_0$ .

Di conseguenza  $f(p)g(p) \rightarrow 0$  per  $p \rightarrow p_0$ . ■

### Esempio

Usiamo il precedente criterio per calcolare  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ . Proviamo che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Osserviamo che  $\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)} = f(x,y)g(y)$ . Abbiamo già visto che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ , quindi anche se  $g(y) \rightarrow 0$  per  $y \rightarrow 0$  in questo caso non usere, per esempio, il teorema sul prodotto dei limiti per calcolare.

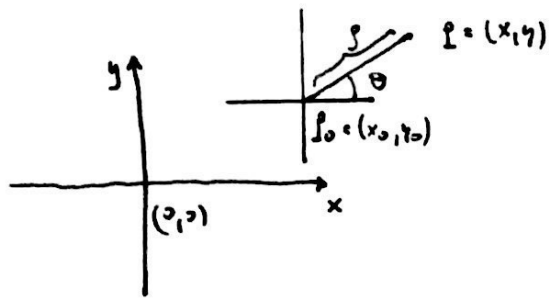
Chiaramente  $g(y) \rightarrow 0$  per  $y \rightarrow 0$

Tuttavia:  $|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$  è limitata e quindi per il criterio precedente si può concludere che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ . ■

### Osservazione

Dato un punto  $(x_0, y_0) = p_0 \in \mathbb{R}^2$ , allora ogni punto  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  può essere rappresentato

come segue  $\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases}$  dove  $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geq 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$  (Coordinate polari)



Usando le definizioni di limite si può verificare che:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(x_0 + \rho \cos(\theta), y_0 + \rho \sin(\theta)) - L| = 0 \quad (I)$$

La precedente osservazione si può riassumere nel seguente teorema

### Teorema

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 = (x_0, y_0)$  un punto di accumulazione per  $A$ . Allora vale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \rho \cos(\theta), y_0 + \rho \sin(\theta)) = L \quad \underline{\text{uniformemente rispetto a } \theta} \quad (II)$$

• Ancora, il limite precedente (II) (che è equivalente ad (I)) è uniforme in  $\theta$  se  $\forall \varepsilon > 0$   
 $\exists \delta > 0$  tale che per ogni  $0 < \rho < \delta$  e per ogni  $\theta \in [0, 2\pi]$ , si ha  $|f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - L| < \varepsilon$ .

### • Osservazione

Una condizione sufficiente a garantire che  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - L| = 0$

è mostrare che  $\exists$  una funzione  $g(\rho) \geq 0$  (che non dipende da  $\theta$ ) tale che:

$$1. \quad |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - L| \leq g(\rho), \quad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi)$$

e inoltre

$$2. \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

### Esempio

Proviamo che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ . Infatti passando in coordinate polari: 
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

si ha che

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = \frac{|\sin(\rho^2 \cos^2 \theta + 3 \rho^2 \sin^2 \theta)|}{\rho} = \rho (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) \frac{|\sin(\rho^2 \cos^2 \theta + 3 \rho^2 \sin^2 \theta)|}{\rho^2 \cos^2 \theta + 3 \rho^2 \sin^2 \theta}$$

$$\leq \rho \left( \underbrace{\cos^2 \theta}_{\leq 1} + 3 \underbrace{\sin^2 \theta}_{\leq 1} \right) \leq \underbrace{4\rho}_{=: g(\rho)}$$

abbiamo quindi che  $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \leq g(\rho) = 4\rho$

e che  $g(\rho) = 4\rho \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow 0$

quindi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ .  $\blacksquare$

## Esempio

Consideriamo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  e proviamo di tale limite  $\exists$  e vale zero.

Come prima passiamo in coordinate polari  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  e quindi otteniamo che:

$$|f(x,y)| = |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = \frac{\rho^2 |\cos^2 \theta \sin \theta|}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho |\cos^2 \theta \sin \theta| \leq \rho \quad \text{e} \quad g(\rho) = \rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

Di conseguenza  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = 0$  uniformemente in  $\theta$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \quad \blacksquare$$

## Esempio

Il  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  non esiste. Infatti, se passiamo in coordinate polari  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

$$\text{allora } f(x,y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \cos \theta \sin \theta \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta$$

Poiché il  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta$  dipende da  $\theta \Rightarrow$  esso non può essere uniforme

in  $\theta$  e quindi possiamo concludere che  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .  $\blacksquare$