

DEFINIZIONE DI SPETTRO DI RISPOSTA

L'analisi completa della risposta di una struttura ad un sisma descritto mediante accelerogrammi risulta estremamente onerosa e richiede in ogni caso l'impiego di algoritmi implementati su elaboratori elettronici. In relazione a necessità progettuali, inoltre, l'aleatorietà delle caratteristiche dei terremoti che in futuro possono colpire il sito da edificare renderebbe poco significativa l'analisi rispetto ad un solo accelerogramma, anche se si disponesse dell'accelerogramma registrato in epoche passate nello stesso sito od a poca distanza da esso. Una verifica di sicurezza richiederebbe dunque l'analisi della struttura soggetta a diversi accelerogrammi con caratteristiche corrispondenti a quelle dei possibili futuri terremoti (la norma tecnica NTC2018 impone l'uso di una famiglia di sette storie accelerometriche per ogni direzione del moto – §7.3.5). Il problema di progetto e di verifica della sicurezza viene ulteriormente complicato dalla possibilità che la struttura superi il limite di elasticità e si comporti come un sistema non lineare durante i terremoti più violenti; sarebbe dunque necessario operare mediante analisi dinamiche non lineari, con conseguente aggravio dell'onere computazionale e delle competenze richieste al progettista. Per ovviare a tutti i problemi finora esposti è di grande aiuto l'uso di quelli che nel seguito verranno definiti come spettri di risposta elastici, spettri di risposta non lineari e spettri di progetto.

- *Definizione di spettro di risposta elastico*

La conoscenza della risposta della struttura istante per istante è superflua ai fini progettuali, interessando in realtà solamente il valore massimo e le relative sollecitazioni. Una rappresentazione che fornisca direttamente tale valore per oscillatori con qualsiasi periodo e qualsiasi smorzamento risolverebbe in maniera semplice e diretta il problema in situazioni di comportamento elastico lineare.

Essa si presenta sotto forma di grafico ed è denominata "spettro di risposta elastico". Si ottiene da un dato accelerogramma calcolando, una volta per tutte, la risposta massima di oscillatori semplici con periodo proprio T compreso nel campo di variazione delle strutture reali ($0 \div 4$ s) e riportandole in un diagramma che abbia in ascisse il periodo T , o la frequenza $f=1/T$, ed in ordinata tale valore massimo. La risposta è generalmente calcolata in termini di spostamento per diversi valori dello smorzamento scelti anch'essi entro il campo di variazione delle strutture reali ($0 \div 20\%$). Si ottengono così gli spettri di risposta degli spostamenti relativi, indicati nel seguito con il simbolo S_D .

Moltiplicando gli spostamenti spettrali per ω e per ω^2 si ottengono rispettivamente gli spettri delle "pseudo-velocità", $S_V=\omega S_D$, e delle "pseudo-accelerazioni", $S_A=\omega^2 S_D$, che forniscono con buona approssimazione i valori massimi della risposta dell'oscillatore in termini di velocità relative ed accelerazioni assolute.

Il perché del prefisso "pseudo" alle definizioni di spettri di velocità relativa e di accelerazione assoluta è comprensibile dalle considerazioni di seguito esposte.

Come visto nella parte dedicata all'analisi dinamica nel dominio del tempo di oscillatori semplici soggetti a forzanti qualsiasi, nella soluzione generale il contributo più importante alla risposta è quello legato alla sua fase di risposta a regime (ovvero alla soluzione particolare dell'equazione non omogenea rappresentativa del moto del sistema), definita mediante l'integrale di Duhamel. Nel caso di azione esterna di tipo sismico, lo stesso integrale assume la seguente espressione:

$$x_p(t) = -\frac{1}{\omega_{1d}} \int_0^t e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin \omega_{1d}(t-\tau) a_g(\tau) d\tau \quad (1)$$

Derivando la (1) due volte si ottiene:

$$v_p(t) = -\int_0^t e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \cos \omega_{1d}(t-\tau) a_g(\tau) d\tau - \xi\omega_1 x_p(t) \quad (2)$$

$$a_p(t) = -a_g(t) - 2\xi\omega_1 v_p(t) - \omega_1^2 x_p(t) \quad (3)$$

Dalla (3) può essere esplicitata come segue l'espressione dell'accelerazione assoluta che più interessa ai fini della definizione dell'azione inerziale agente sulla struttura in caso di sisma:

$$a_t(t) = a_p(t) + a_g(t) = -[2\xi\omega_1 v_p(t) + \omega_1^2 x_p(t)] \quad (4)$$

Relativamente ai sistemi debolmente smorzati (ovvero caratterizzati da percentuali ξ non superiori al 28%, come verrà ribadito dalla limitazione della NTC2008 e della NTC2018 sul parametro η - § 3.2.3.2.1) sono possibili le seguenti approssimazioni e generalizzazioni ($\omega_1 = \omega$):

$$\omega_{1d} = \omega_1 \sqrt{1 - \xi^2} = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\xi\omega_1 x_p(t) = \xi\omega x_p(t) \cong 0$$

$$\xi\omega_1 v_p(t) = \xi\omega v_p(t) \cong 0$$

Essendo inoltre circa uguali l'energia totale del sistema negli istanti di massimo spostamento e massima velocità si può ammettere:

$$S_D = \max |x_p(t)| \quad (5)$$

$$S_V = \max |v_p(t)| \cong \omega S_D \quad (6)$$

$$S_A = \max |a_t(t)| \cong \omega^2 S_D \quad (7)$$

Le approssimazioni sono migliori in termini di accelerazione di quanto non risulti per le velocità.

La definizione di pseudo-accelerazione è molto utile nella valutazione delle sollecitazioni di una struttura poiché, moltiplicata per la massa, fornisce direttamente l'aliquota della forza d'inerzia che viene equilibrata dalla forza di richiamo elastico; infatti si ha:

$$mS_A = m\omega^2 S_D = m(k/m)S_D = kS_D \quad (8)$$

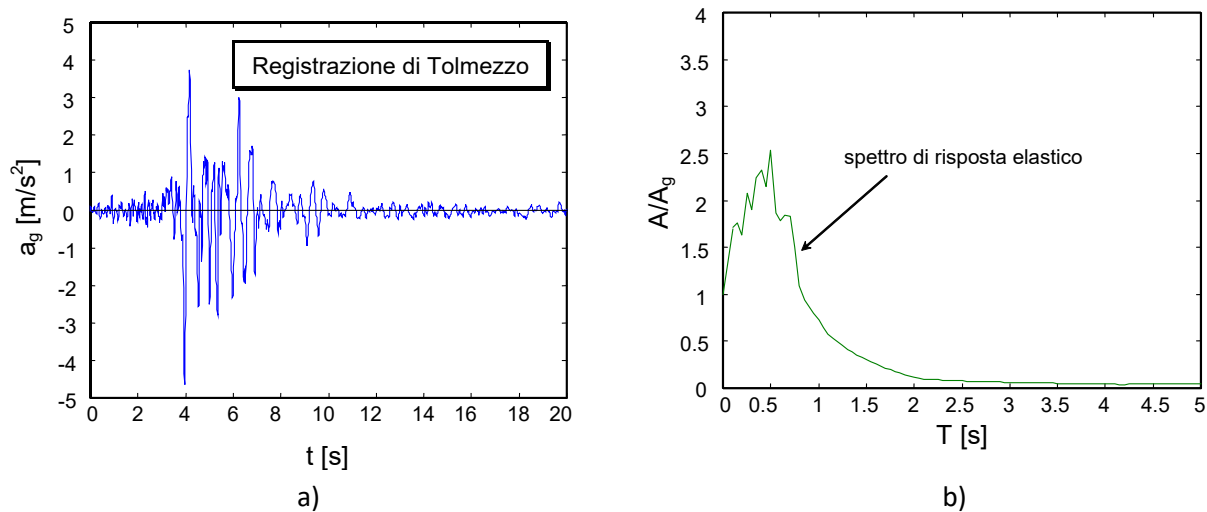


Figura 1 – a) Registrazione del Terremoto di Tolmezzo del 6/5/1976; b) spettro di risposta relativo ad uno smorzamento del 5% ottenuto dallo stesso segnale sismico reale

In Figura 2 viene mostrato l'andamento qualitativo dei tre spettri di risposta desumibili da uno stesso accelerogramma. Dai grafici in essa riportati si evince come i massimi amplificativi si verifichino in corrispondenza di intervalli di periodi adiacenti, mai coincidenti.

Tenendo conto del fatto che, ai fini progettuali, ciò che interessa maggiormente sono proprio i valori massimi assunti dalle tre grandezze S_A , S_V ed S_D , risulta di particolare interesse la rappresentazione spettrale originalmente proposta da Newmark ed Hall su di una carta tetralogarithmica. Secondo tale forma di rappresentazione i tre spettri devono essere tracciati su una carta con quattro scale logaritmiche: in ascissa $\log\omega$ (od equivalentemente $\log T$), sull'ordinata verticale $\log S_V$ e nelle ordinate a -45° e $+45^\circ$ $\log S_D$ e $\log S_A$ (viceversa nel caso di $\log T$ in ascisse).

Tutti i punti di questa carta godono della proprietà:

$$\log S_V = \log S_D + \log \omega$$

$$\log S_V = \text{Log} S_A - \log \omega$$

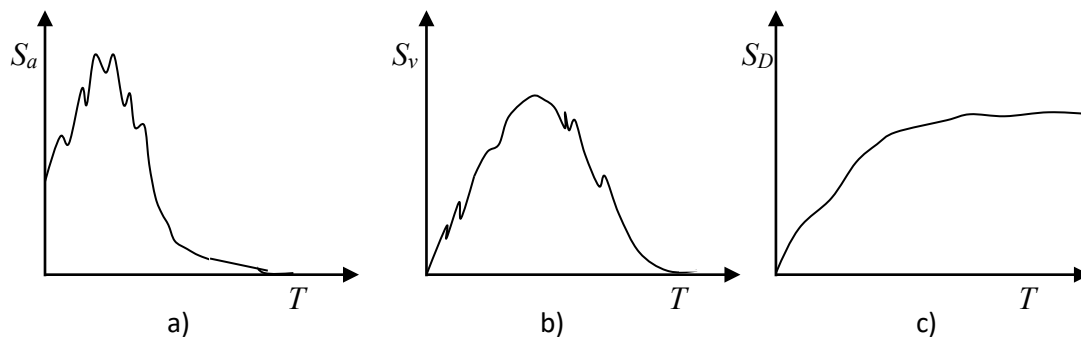


Figura 2 – Spettro di risposta di pseudo-accelerazione (a), di pseudo-velocità (b) e di spostamento (c)

Attraverso semplici regole, la carta tetralogarithmica permette inoltre la costruzione di spettri approssimati dei terremoti di tipo “far fault”, ovvero con contenuto spettrale in frequenza più ampio. Il tracciamento di tali curve avviene secondo i seguenti passi procedurali:

1. si tracciano le linee ortogonali ai rispettivi assi di riferimento dei valori di picco a_g dell’accelerazione (Maximum Ground Acceleration), v_g della velocità (Maximum Ground Velocity), d_g dello spostamento (Maximum Ground Displacement). Queste linee s’intersecano nei punti P_{AV} e P_{VD} le cui ascisse corrispondono ai periodi T_{AV} e T_{VD} di seguito definiti:

$$T_{AV} = 2\pi v_g / a_g$$

$$T_{VD} = 2\pi d_g / v_g$$

2. Il passaggio da questi diagrammi alle curve spettrali di risposta di oscillatori con date percentuali di smorzamento avviene sulla base della conoscenza di fattori amplificativi massimi in termini di accelerazione α_a , di velocità α_v , e di spostamento α_d . In Tabella 1 vengono riportati i valori di tali coefficienti ottenuti da Newmark ed Hall per una serie di terremoti registrati sul territorio americano. Si tracciano quindi sulla stessa carta tetralogarithmica linee parallele alle rette $a_g = \text{cost.}$, $v_g = \text{cost.}$, $d_g = \text{cost.}$, con ordinate rispettivamente pari ad $\alpha_a a_g$, $\alpha_v v_g$, ed $\alpha_d d_g$.
3. Essendo noto che per T molto piccolo (strutture molto rigide) le accelerazioni, e per T molto grande (strutture molto deformabili) gli spostamenti dell’oscillatore semplice tendono a coincidere con le corrispondenti grandezze del moto del terreno, potrà essere conclusivamente tracciata la curva involucro dei massimi valori spettrali caratterizzanti il sistema di oscillatori dinamici esaminati. Partendo dalla parte delle accelerazioni e proseguendo verso gli spostamenti

essa risulterà quindi successivamente tangente alle rette a_g , $\alpha_a a_g$, $\alpha_v v_g$, $\alpha_d d_g$ e d_g (Figura 3).

Tabella 1 – Dati amplificativi desunti da Newmark e Hall per i terremoti americani (in grassetto i dati relativi ad uno smorzamento del 5%)

ξ (%)	α_a	α_v	α_d
0	6,4	4,0	2,5
0,5	5,8	3,6	2,2
1	5,2	3,2	2,0
2	4,3	2,8	1,8
5	2,6	1,9	1,4
7	1,9	1,5	1,2
10	1,5	1,3	1,0

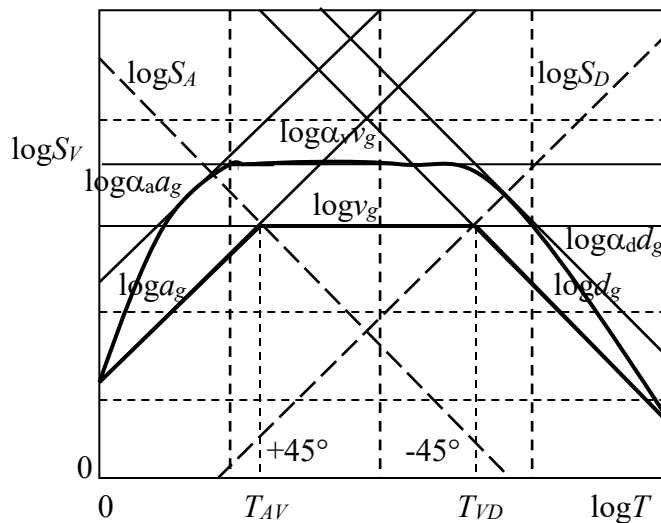


Figura 3 – Rappresentazione spettrale sulla carta tetralogarithmica

Un'altra rappresentazione delle curve spettrali di risposta è quella che vede riportati in un unico diagramma i valori di S_A , in ordinate, ed S_D in ascisse. Il grafico che si ottiene viene denominato "spettro di risposta ADRS" (dall'acronimo di Acceleration-Displacement Response Spectrum). In esso le rette che escono dall'origine ed incontrano la curva in un punto di coordinate $[S_D(T_i), S_A(T_i)]$, corrispondenti ad un dato periodo T_i della struttura, hanno pendenza definita dalla relazione:

$$\omega_i^2 = S_A(T_i) / S_D(T_i)$$

ovvero dal quadrato della pulsazione naturale dell'oscillatore (Figura 4). Dalla lettura di questo diagramma è possibile stabilire se, in campo elastico, una struttura risulti

Nel campo dei periodi alti ($T > T_{VD}$) la risposta è insensibile a tali effetti per cui gli spettri lineari ed elastoplastici praticamente coincidono.

Nel campo $T_{AV} < T < T_{VD}$ l'aumento del periodo per abbattimento della rigidezza equivalente tende a produrre risposte più ampie, ma ciò viene contrastato dalla dissipazione di energia per isteresi; ne risulta che gli spostamenti elastoplastici sono mediamente uguali o leggermente inferiori ai corrispondenti elastici.

Infine, per $T < T_{AV}$ l'effetto di riduzione della rigidezza è decisivo e gli spostamenti elastoplastici eccedono quelli elastici mentre le accelerazioni tendono ad avere gli stessi valori al tendere di T a zero.

Coerentemente con tali osservazioni e con i risultati statistici di appositi studi, è possibile allora costruire lo spettro di risposta elastoplastico, per una duttilità richiesta μ , come indicato in Figura 5. Esso si ottiene dal corrispondente spettro elastico ad ugual smorzamento viscoso, dividendo l'ordinata dello spettro elastico per un coefficiente $\beta(\mu, T)$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\beta(\mu, T) = \mu \quad \text{per } T > T_{AV} \quad (9a)$$

$$\beta(\mu, T) = \sqrt{2\mu - 1} \quad \text{per } S_A = S_{Amax} (T < T_{AV}) \quad (9b)$$

$$\beta(\mu, T) = 1 \quad \text{per } T \rightarrow 0 \quad (9c)$$

e da valori interpolanti nelle zone in cui β non risulti direttamente stimato dalle (9). In particolare, la (9a) si basa sull'ipotesi di uguali spostamenti, da cui deriva l'uguaglianza tra la duttilità richiesta μ ed il rapporto tra la forza elastica e quella di plasticizzazione dell'oscillatore elastoplastico, come indicato in Figura 6a. In riferimento alla simbologia in Figura risulta infatti quanto segue:

$$\beta = \frac{S_{AE}}{S_{AP}} = \frac{mS_{AE}}{mS_{AP}} = \frac{F_E}{F_y} = \frac{x_E}{x_y} = \mu \quad \text{per } T > T_{AV} \quad (10)$$

La (9b) si basa invece sull'uguaglianza tra l'energia accumulata dai due oscillatori, come mostrato in Figura 6b. In questo caso si ha:

$$F_y (x_{max} - x_E) = \frac{1}{2} (F_E - F_y) (x_E - x_y) \quad (11)$$

Dividendo entrambi i membri per $F_y x_y$ si ottiene:

$$\frac{F_y}{F_y} \left(\frac{x_{max}}{x_y} - \frac{x_E}{x_y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{F_E}{F_y} - \frac{F_y}{F_y} \right) \left(\frac{x_E}{x_y} - \frac{x_y}{x_y} \right) \quad (12)$$

Ricordando che $\beta = \frac{S_{AE}}{S_{AP}} = \frac{F_E}{F_y} = \frac{x_E}{x_y}$ e che $\mu = \frac{x_{max}}{x_y}$, la (12) diventa:

$$(\mu - \beta) = \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 1) \quad (13)$$

che, risolta rispetto a β , porta alla (9b).

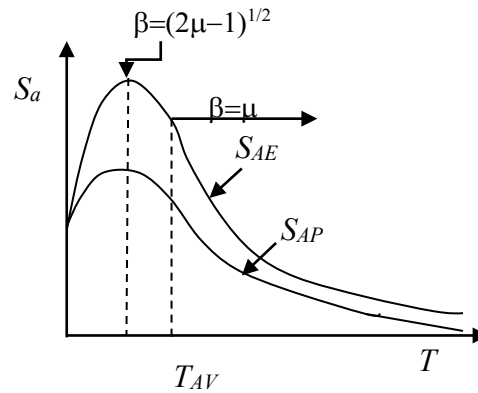


Figura 5 – Costruzione dello spettro di risposta elastoplastico a partire da quello elastico

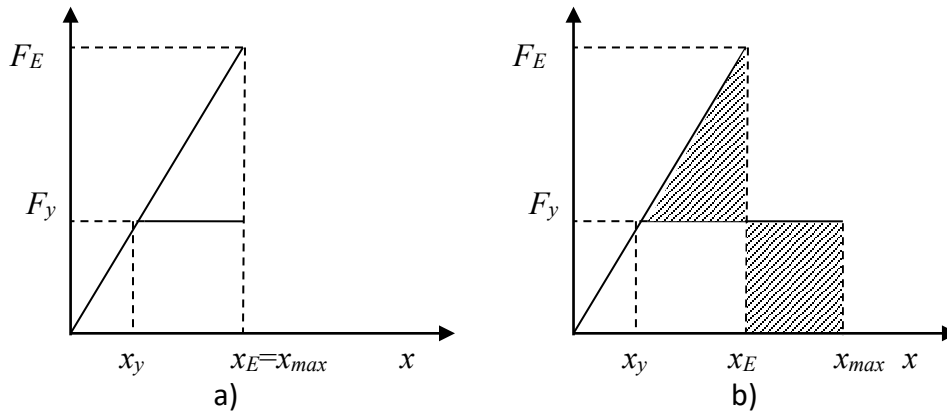


Figura 6 – Condizione di uguaglianza degli spostamenti (a) e delle energie sottese (b)

- *Definizione di spettro di progetto*

La risposta di una struttura schematizzabile come un oscillatore elementare dipende, come già osservato, dalle caratteristiche del terremoto per intensità, contenuto in frequenza, durata, e dalle proprietà della struttura in campo lineare (periodo proprio e smorzamento) e non lineare (forma del ciclo d'isteresi). Tali caratteristiche sono in generale di difficile, se non impossibile, determinazione e previsione; una progettazione ideale dovrebbe pertanto procedere attraverso una sperimentazione statistico-numerica nella quale le stesse vengano variate intorno ai loro valori più probabili. Questa procedura risulta tuttavia impraticabile anche adottando il metodo dello spettro di risposta.

La soluzione a questo problema è stata individuata nel cosiddetto "spettro di progetto", la cui determinazione avviene attraverso quattro principali fasi.

Nella prima viene definito uno spettro elastico di riferimento; si calcola la distribuzione statistica delle ordinate degli spettri relativi ad una casistica di terremoti registrati nel passato, normalizzati ad un'accelerazione unitaria del terreno, che abbiano caratteristiche per quanto possibile simili a quelle attese nel sito in esame, e si congiungono le ordinate con uguali probabilità di superamento. Si può ad esempio operare sui valori medi o su preassegnati frattili.

Nella seconda fase si riduce lo spettro elastico ad uno spettro non lineare mediante regole analoghe a quelle viste nel paragrafo precedente. Per questa fase occorre conoscere approssimativamente i valori ammissibili della duttilità richiesta, con le conseguenti implicazioni progettuali (scelta del sistema resistente, dettagli costruttivi, etc.).

Nella terza fase si effettuano ulteriori aggiustamenti che tengono conto, fra l'altro, dell'incertezza nella valutazione del periodo proprio della struttura e del suo comportamento in campo non lineare in relazione alla durata del sisma stesso. In particolare, si fa riferimento all'accumulo delle deformazioni plastiche di cui gli spettri non danno informazioni. A questo riguardo si osserva infatti come, durante un evento tellurico, le strutture a periodo più basso siano sottoposte ad un numero di cicli superiore rispetto ad altre più deformabili, essendo tale numero approssimativamente uguale al rapporto tra la durata del sisma ed il periodo medio della struttura. E' perciò opportuno contenere la duttilità massima richiesta ai sistemi con periodo più basso, così da contenere le deformazioni plastiche accumulate entro valori confrontabili con quelli relativi a sistemi con periodi più alti.

Nella quarta fase si definisce infine il fattore di scala, ossia l'intensità di riferimento in termini di accelerazione massima del terreno, in relazione alla sismicità del sito, alla duttilità di progetto stabilita, allo stato limite di prestazione nei confronti del quale si operi.

E' evidente che lo spettro così ottenuto non descrive un particolare terremoto, ma specifica le resistenze ottimali delle strutture modellate, sulla base delle quali deve essere eseguito il progetto delle membrature.

Il processo di definizione dello spettro di progetto trova la sua naturale conclusione e rappresentazione sintetica nelle formulazioni contenute nel testo della NTC2018 (§ 3.2 Azione sismica). In esso è riportato quanto segue:

“Le azioni sismiche di progetto, in base alle quali valutare il rispetto dei diversi stati limite considerati, si definiscono a partire dalla “pericolosità sismica di base” del sito di costruzione. Essa costituisce l’elemento di conoscenza primario per la determinazione delle azioni sismiche.

La pericolosità sismica è definita in termini di accelerazione orizzontale massima attesa a_g in condizioni di campo libero su sito di riferimento rigido con superficie topografica orizzontale (di categoria A quale definita al §3.2.2), nonché di ordinate dello spettro di risposta elastico in accelerazione ad essa corrispondente $S_e(T)$, con riferimento a prefissate probabilità di eccedenza P_{V_R} , come definito nel §3.2.1, nel periodo di riferimento V_R , come definito nel §2.4. In alternativa è ammesso l’uso di accelerogrammi, purché correttamente commisurati alla pericolosità sismica del sito.

Ai fini della presente normativa le forme spettrali sono definite, per ciascuna delle probabilità di superamento nel periodo di riferimento P_{V_R} , a partire dai valori dei seguenti parametri su sito di riferimento orizzontale:

a_g accelerazione orizzontale massima al sito;

F_o valore massimo del fattore di amplificazione dello spettro in accelerazione orizzontale;

T_C^* periodo di inizio del tratto a velocità costante dello spettro in accelerazione orizzontale.

In allegato alla presente norma, per tutti i siti considerati, sono forniti i valori di a_g , F_o e T_C^* necessari per la determinazione delle azioni sismiche.”

Il testo di norma prevede una particolarizzazione degli spettri in relazione al fatto che la componente del sisma sia orizzontale o verticale e che la risposta strutturale sia elastica od anelastica. Formalmente, le varie formulazioni hanno la seguente comune differenziazione in quattro tratti così definiti:

$$0 \leq T < T_B \quad S_e(T) = a_g S \eta F_o \left[\frac{T}{T_B} + \frac{1}{\eta F_o} \left(1 - \frac{T}{T_B} \right) \right] \quad (14a)$$

$$T_B \leq T < T_C \quad S_e(T) = a_g S \eta F_o \quad (14b)$$

$$T_C \leq T \leq T_D \quad S_e(T) = a_g S \eta F_o \frac{T_C}{T} \quad (14c)$$

$$T_D \leq T \quad S_e(T) = a_g S \eta F_o \frac{T_C T_D}{T^2} \quad (14d)$$

da cui deriva una rappresentazione grafica come quella mostrata in Figura 7.

A parte i singoli valori numerici da attribuire ai vari parametri, passando dalla componente orizzontale a quella verticale, ciò che cambia nelle (14) è la costante F_o , che viene sostituita da un'altra costante F_v , la cui definizione dipende comunque dallo stesso dato F_o .

Rispetto alle medesime equazioni, nel caso di spettro anelastico il parametro η , fattore che altera lo spettro elastico per coefficienti di smorzamento viscosi convenzionali ξ diversi dal 5% mediante la relazione:

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi}} \geq 0,55$$

viene sostituito con il rapporto $1/q$, essendo "q" il fattore di struttura. Si osserva come q svolga lo stesso ruolo esercitato dal fattore di riduzione β di passaggio dallo spettro elastico a quello anelastico di cui nel precedente paragrafo è stato definito il valore nel caso di oscillatori con comportamento elastico perfettamente plastico.

Generalmente definito come (§ 7.3.1 NTC 2018):

$$q = q_0 K_R \quad [7.3.1]$$

dove: q_0 rappresenta il valore massimo del fattore di struttura che dipende dal livello di duttilità attesa, dalla tipologia strutturale e dal rapporto α_u/α_1 tra l'intensità dell'azione sismica per la quale si verifica la formazione di un numero di cerniere plastiche tali da rendere la struttura labile e quella per cui il primo elemento strutturale raggiunge la plasticizzazione a flessione; K_R è un fattore riduttivo che dipende dalle caratteristiche di regolarità in altezza della costruzione, con valore pari ad 1 per costruzioni regolari in altezza ed a 0,8 per costruzioni non regolari; nei paragrafi successivi del testo di norma dedicati alle differenti tipologie strutturali, in acciaio, in cemento armato, etc., il fattore di struttura trova una sua particolare ridefinizione in ragione delle specificità delle singole tipologie considerate e delle condizioni di regolarità dell'edificio analizzato.

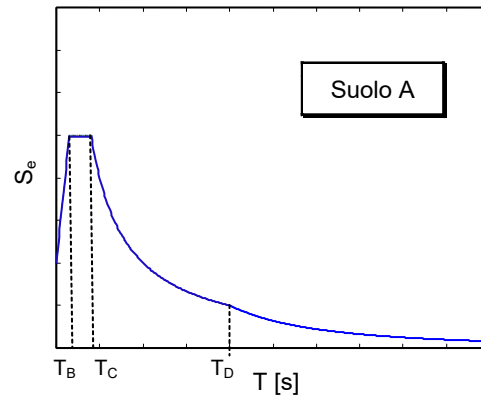


Figura 7 – Curva rappresentativa di uno spettro elastico di progetto conforme alle formulazioni della NTC2018