7 aprile 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di martedì 7 aprile 2020 (la prima lezione dedicata all’ultima parte del programma, cioè la cosiddetta “logica dei predicati”). La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Studiando la logica proposizionale nelle prime settimane del corso, quando (ricordate?) potevamo stare pigiati in aula 3 senza paura di contrarre sconosciute malattie, abbiamo imparato a formalizzare semplici ragionamenti dimostrando o confutando il fatto che un certo enunciato sia conseguenza logica di altri. Alcuni ragionamenti di questo tipo sono stati studiati anche tanti secoli fa, e rientrano in una cateogoria di ragionamenti detti *sillogismi*.

I sillogismi sono di tanti tipi (nel Medio Evo ne fu data una classificazione molto precisa, e fu inventata anche una filastrocca per memorizzare i vari tipi di sillogismo e verificarne la validità: cercate con Google “Barbara, celarent, darii, ferio…”). A noi adesso interessa capire che *solo alcuni di essi* si possono studiare con i mezzi della logica proposizionale. Facciamo un paio di esempi.

PREMESSE:

(1) Se esco di casa per andare a giocare a calcetto con gli amici, allora vengo multato;

(2) Non vengo multato

CONSEGUENZA:

(3) Non esco di casa per andare a giocare a calcetto con gli amici.

Abbiamo visto come si fa a dimostrare che la (3) è effettivamente conseguenza logica delle (1) e (2) utilizzando il linguaggio della logica proposizionale; si devono innanzitutto scegliere opportune variabili proposizionali per indicare gli enunciati che contribuiscono a costruire le premesse e la supposta conseguenza, ad esempio:

$p =$ “esco di casa per andare a giocare a calcetto con gli amici”;
$q =$ “vengo multato”.

Poi si devono scrivere le formule che rappresentano le premesse e la supposta conseguenza, cioè $p \to q$, $\neg q$, $\neg p$. Infine si deve dimostrare che

$$\{p \to q, \neg q\} \vDash \neg p$$

e questa dimostrazione, visto che sono coinvolte soltanto due variabili proposizionali, potremmo facilmente farla utilizzando le tabelle dei valori di verità. Per situazioni più complesse, comunque, abbiamo altri strumenti che vi suggerisco di ripassare!

PREMESSE:

(1) Se esco di casa per andare a giocare a calcetto con gli amici, allora vengo multato;

(2) Non esco di casa per andare a giocare a calcetto con gli amici;

CONSEGUENZA:

(3) Non vengo multato.

Questo ragionamento invece è sbagliato: la (3) non è conseguenza logica della (1) e della (2), cioè (utilizzando la formalizzazione vista sopra)

$$\{p \to q, \neg p\} \nvDash \neg q$$

perché una valutazione di verità v tale che $v(p) = 0$ e $v(q) = 1$ rende vere sia la formula $p \to q$ che la formula $\neg p$ ma non rende vera la formula $\neg q$.

Fin qui tutto come sappiamo, perché è possibile “scomporre” gli enunciati oggetto delle nostre considerazioni considerandoli come composti (mediante i connettivi logici che abbiamo imparato ad utilizzare) da enunciati più semplici (“atomici”, non nel senso che sono *esplosivi* ma nel senso che sono enunciati *indivisibili* nella nostra formalizzazione) che rappresentiamo attraverso variabili proposizionali. Il linguaggio della logica proposizionale ci permette di lavorare con le formule che corrispondono a tali enunciati, e abbiamo imparato un semplice ed efficiente algoritmo (l’algoritmo di Davis e Putnam) per decidere se una certa formula della logica proposizionale è soddisfacibile oppure no; questo è quanto ci serve, perché a suo tempo abbiamo dimostrato che (per due formula α e β) si ha che

$\alpha \vDash \beta$ se e soltanto se $\alpha \wedge \neg\beta$ non è soddisfacibile.

Ma adesso consideriamo il seguente ragionamento (anch’esso è un sillogismo, anche se di diverso tipo):

PREMESSE:

(1) Ogni cosa che sia un virus, se è sconosciuta è pericolosa;

(2) Il COVID-19 è un virus ed è sconosciuto;

CONSEGUENZA:

(3) Il COVID-19 è pericoloso.

Penso che a livello intuitivo sulla correttezza del ragionamento siamo tutti d’accordo (ricordate: le premesse vanno accettate senza discutere, quello che la logica ci insegna a fare è capire su il terzo enunciato è o non è conseguenza dei primi due!). Ma capite bene che non è possibile “scomporre” le premesse esprimendole come “enunciati atomici legati da connettivi logici”: quello che “ci frega” è la parola *ogni* nella prima premessa!

La logica dei predicati (o “logica del primo ordine”), che studiamo in questa ultima parte del corso, considera al posto delle varibili proposizionali (che abbiamo utilizzato nel capitolo 2) degli oggetti più complessi atti ad esprimere relazioni e proprietà di elementi scelti in opportuni ambienti (tipicamente strutture matematiche, ma anche scenari più fantasiosi (!) e “umani” come quelo del precedente esempio). Il valore di verità non è più assegnato apoditticamente ipotizzando per le variabili ogni scelta possibile, ma è legato alla “interpretazione” (questa parola diventerà un termine tecnico!) della formula a cui assegnarlo.

Inevitabilmente, alla luce di quanto sopra accennato, ci serviranno alfabeti più articolati di quello introdotto nella sez. 2.1. E il plurale non è casuale, perché la maggiore ricchezza della logica dei predicati deriva anche dal fatto che per ogni situazione si può considerare un diverso linguaggio, fondato su un diverso alfabeto, nel quale ci saranno simboli atti ad esprimere proprietà degli oggetti (ma naturalmente dovranno essere proprietà che volta per volta potranno essere vere o false, esattamente una di queste due cose: cioè *predicati*!) ed anche relazioni fra essi (e, in particolare, funzioni!).

Come prima cosa dobbiamo metterci d’accordo su come indicare gli oggetti che compaiono negli enunciati che vogliamo studiare: dobbiamo *descriverli* per poterli individuare. Il primo passo è quindi l’introduzione di quello che chiamerò (attenzione! il nome non è standard!) un *linguaggio descrittivo di primo livello*. E a tale scopo ci serve un alfabeto adatto!

Un insieme A si dice un *alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello* (o anche, brevemente, un *alfabeto descrittivo di primo livello*) se i suoi elementi sono:

(i) infiniti simboli $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$ ancora una volta “etichettati” con i numeri naturali, che chiameremo *variabili individuali* (o, più semplicemente, *variabili*);

(ii) un numero finito (ma arbitrario) di simboli $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_k$ detti “*simboli di costante* (*individuale*)” ;

(iii) un numero finito (ma arbitrario) di simboli $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_s$ detti “*simboli di funzione*”, a ciascuno dei quali resta associato un numero intero positivo detto *arietà* del simbolo di funzione; talvolta si scrive $f_i^{(j_i)}$ per indicare che al simbolo di funzione f_i è associata la arietà j_i (o, come spesso si dice, che il simbolo di funzione f_i ha arietà j_i) ;

(iv) le parentesi (,) e la virgola , .

Il numero k dei simboli di costante, il numero s dei simboli di funzione e la sequenza delle rispettive arietà costituiscono il *tipo* dell’alfabeto A.

Analogamente a quanto fatto nella sez. 2.1 degli appunti di logica (e seguendo peraltro una terminologia del tutto generale), diremo *parola* sull’alfabeto descrittivo A sopra individuato ogni sequenza finita di elementi di A: gli elementi di una parola vengono usualmente scritti di seguito senza altri segni grafici. Anche in questo caso non ci interessano tutte le parole sull’alfabeto, ma soltanto alcune con particolari caratteristiche strutturali.

Una parola t su A si dice un *termine* (*su* A) se esiste una sequenza finita t_0, t_1, t_2, $\dots$, t_k di parole su A tali che:

(i) $t = t_k$

e

(ii) per ogni $h \leq k$ la parola t_h è una variabile individuale oppure è un simbolo di costante individuale oppure è della forma

$$f_i^{(j_i)} t_{s_1} t_{s_2} \dots t_{s_{j_i}}$$

dove j_i è l’arietà di f_i e $s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_{j_i} < h$. Generalmente, per maggiore chiarezza, si utilizzano parentesi e virgola e si scrive

$$f_i\left(t_{s_1}, t_{s_2}, \dots, t_{s_{j_i}}\right) \qquad \text{anziché} \qquad f_i^{(j_i)} t_{s_1} t_{s_2} \dots t_{s_{j_i}}$$

La sequenza finita $t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_k$ si dice una *costruzione* del termine t.

Il minimo numero naturale k per cui esiste una costruzione $t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_k$ del termine t si dice *lunghezza* di t.

Un termine si dice *chiuso* se in esso non compaiono variabili, *aperto* altrimenti.

L’insieme dei termini costituisce il *linguaggio descrittivo di primo livello* associato all’alfabeto A. I termini servono ad individuare (in modo articolato e flessibile) gli elementi dello scenario in cui vogliamo lavorare. Esistono a priori infinite possibili situazioni nelle quali possiamo ambientare i nostri ragionamenti; avere però individuato un particolare alfabeto descrittivo di primo livello (o meglio, il suo tipo, che è ciò che lo caratterizza!), già restringe il campo.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello. Si dice *struttura adeguata a* A ogni terna ordinata (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$) tale che (per opportuni numeri naturali k e w)

- S è un insieme non vuoto;
- $\mathcal{C}$ è un sottoinsieme di S formato da k elementi (che si dicono *costanti*);
- $\mathcal{F}$ è un insieme $\{\overline{f}_0, \overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_w\}$ di w funzioni tali che per $i := 1, \ldots, w$ $\overline{f}_i$ è una funzione $\mathrm{S}^{j_i} \to \mathrm{S}$ dove j_i è la arietà di f_i .

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello, e sia $\Sigma =$ (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$) una struttura adeguata a A. Si dice *interpretazione* di A su Σ ogni funzione da A in $\mathcal{C} \cup \mathcal{F}$ che associa ad ogni simbolo di costante un elemento di $\mathcal{C}$ e ad ogni simbolo di funzione f un elemento $\overline{f}$ di $\mathcal{F}$ “rispettando le arietà”, ossia con la condizione che $\overline{f}$ sia una funzione $\mathrm{S}^{j} \to \mathrm{S}$ dove j è la arietà di f.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello, e sia $\Sigma =$ (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$) una struttura adeguata a A. Se è data una interpretazione di A su Σ, ad ogni termine chiuso t su A resta associato in modo univoco un elemento di S (che diremo *valore* di t nell’interpretazione considerata): quello che si ottiene sostituendo ad ogni simbolo di costante la costante corrispondente, ad ogni simbolo di funzione la funzione corrispondente e calcolando i valori delle funzioni così ottenute. Ai termini aperti, invece, con questo procedimento non si riesce in generale ad associare un elemento di S.

$\boxed{\text{Esempio 3.1.1}}$

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello con due simboli di costante (c_0 e c_1) e due simboli di funzione (f e g, entrambi di arietà 2). Sia

$$t_1 := f(c_0, g(c_1, c_1))\,;$$
$$t_2 := f(x_0, g(x_0, c_1))\,.$$

Il termine t_1 è chiuso, mentre il termine t_2 è aperto. Vediamo alcuni esempi di strutture adeguate a A ed alcune possibili interpretazioni di A su esse.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $S := \mathbb{Z}$, $\mathcal{C} := \{0, 1\}$, $\mathcal{F} := \{+, \cdot\}$.

Una possibile interpretazione associa 0 a c_0, 1 a c_1, $+$ a f e $\cdot$ a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $0 + (1 \cdot 1)$, cioè 1, mentre al termine t_2 possiamo associare la (comoda, e utile) scrittura simbolica $2x_0$ (osservando che $x_0 + (x_0 \cdot 1) = 2x_0$), ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}$.

Un'altra possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1 e poi ancora $+$ a f e $\cdot$ a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $1 + (0 \cdot 0)$, cioè ancora 1, mentre al termine t_2 possiamo associare la (comoda, e utile) scrittura simbolica x_0 (osservando che $x_0 + (x_0 \cdot 0) = x_0$), ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}$.

Una terza possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1, $\cdot$ a f e $+$ a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $1 \cdot (0 + 0)$, cioè 0, mentre al termine t_2 possiamo associare la (comoda, e utile) scrittura simbolica x_0^2 (osservando che $x_0 \cdot (x_0 + 0) = x_0^2$), ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $S := \mathbb{N}$, $\mathcal{C} := \{0, 1\}$, $\mathcal{F} := \{\text{MCD}, \textit{mcm}\}$.

Una possibile interpretazione associa 0 a c_0, 1 a c_1, MCD a f e *mcm* a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $\text{MCD}(0, \textit{mcm}(1, 1))$, cioè 1, mentre al termine t_2 possiamo associare il simbolo x_0 (osservando che $\text{MCD}(x_0, \textit{mcm}(x_0, 1)) = \text{MCD}(x_0, x_0) = x_0$), ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}$.

Un'altra possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1 e poi ancora MCD a f e *mcm* a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $\text{MCD}(1, \textit{mcm}(0, 0))$, cioè ancora 1, mentre al termine t_2 possiamo associare il simbolo x_0 (osservando che $\text{MCD}(x_0, \textit{mcm}(x_0, 0)) = \text{MCD}(x_0, 0) = x_0$), ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}$.

Una terza possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1, *mcm* a f e MCD a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $\textit{mcm}(1, \text{MCD}(0, 0))$, cioè 0, mentre al termine t_2 possiamo associare il simbolo x_0 (osservando che $\textit{mcm}(x_0, \text{MCD}(x_0, 0)) = \textit{mcm}(x_0, x_0) = x_0$), ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ $S := \mathbb{Z}_8$, $\mathcal{C} := \{[2], [5]\}$, $\mathcal{F} := \{+, \cdot\}$.

Una possibile interpretazione associa $[2]$ a c_0, $[5]$ a c_1, $+$ a f e $\cdot$ a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $[2] + ([5] \cdot [5])$, cioè $[3]$, mentre al termine t_2 possiamo associare la (comoda, e utile) scrittura simbolica $x_0 + (x_0 \cdot [5])$, ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}_8$.

Un'altra possibile interpretazione associa $[5]$ a c_0, $[2]$ a c_1, $\cdot$ a f e $+$ a g. Sotto tale interpretazione, il valore di t_1 è $[5] \cdot ([2] + [2])$, cioè $[4]$, mentre al termine t_2 possiamo associare la (comoda, e utile) scrittura simbolica $x_0 \cdot (x_0 + [2])$, ma non un preciso elemento di $\mathbb{Z}_8$.

Come spero abbiate capito, quello che ho chiamato “linguaggio descrittivo di primo livello” serve ad associare a certi oggetti (i *termini* del linguaggio) elementi di una struttura *adeguata* al linguaggio attraverso una *interpretazione* (notate che le parole che ho messo in grassetto in questo periodo hanno tutte un preciso significato tecnico definito in precedenza). Ma, come abbiamo visto negli esempi che ho fatto, questa associazione è possibile in modo univoco solo per i *termini chiusi*; se un termine è aperto, per associargli un elemento della struttura non è sufficiente una interpretazione ma bisogna dare un valore alla varabili individuali che vi compaiono!

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello, sia $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ una struttura adeguata a A e sia data una interpretazione di A su Σ. Sia $\mathcal{X}$ l’insieme delle variabili individuali di S. Si dice *assegnazione* (all’interno della interpretazione data) ogni funzione $\mathcal{X} \to \mathrm{S}$.

La scelta di una assegnazione ci consente di associare un elemento di S a ciascun termine su A; notiamo esplicitamente che, nel caso dei termini aperti, l’elemento associato dipenderà in generale dalla assegnazione scelta.

Precisamente:

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello, sia $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ una struttura adeguata a A, sia data una interpretazione di A su Σ e sia a_0 un’assegnazione all’interno di tale interpretazione. Ad ogni termine t su A resta associato in modo univoco un elemento di S (che diremo ancora *valore* di t nell’interpretazione data e nell’assegnazione considerata): quello che si ottiene sostituendo ad ogni simbolo di costante la costante corrispondente, ad ogni variabile individuale la sua immagine mediante a_0, ad ogni simbolo di funzione la funzione corrispondente e calcolando i valori delle funzioni così ottenute.

Esempio 3.1.2

Riprendiamo in considerazione l’alfabeto A considerato nell’esempio 3.1.1 e le varie interpretazioni lì esaminate, per mostrare come la scelta di assegnazioni consente di associare un elemento della struttura anche ai termini aperti. Ricordiamo che A comprende due simboli di costante (c_0 e c_1) e due simboli di funzione (f e g, entrambi di arietà 2), e che abbiamo posto $t_2 := f(x_0, g(x_0, c_1))$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\quad S := \mathbb{Z}, \ \ \mathcal{C} := \{0, 1\}, \ \ \mathcal{F} := \{+, \cdot\}.$

Una possibile interpretazione associa 0 a c_0, 1 a c_1, $+$ a f e $\cdot$ a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica $x_0 + (x_0 \cdot 1)$. Scegliendo un'assegnazione che porta x_0 in 0, associeremo a t_2 l'elemento 0 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 1, associeremo a t_2 l'elemento 2 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in -1, associeremo a t_2 l'elemento -2 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 2, associeremo a t_2 l'elemento 4 di $\mathbb{Z}$; e così via…

Un'altra possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1 e poi ancora $+$ a f e $\cdot$ a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica $x_0 + (x_0 \cdot 0)$. Scegliendo un'assegnazione che porta x_0 in 0, associeremo a t_2 l'elemento 0 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 1, associeremo a t_2 l'elemento 1 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in -1, associeremo a t_2 l'elemento -1 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 2, associeremo a t_2 l'elemento 2 di $\mathbb{Z}$; e così via…

Una terza possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1, $\cdot$ a f e $+$ a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica $x_0 \cdot (x_0 + 0)$. Scegliendo un'assegnazione che porta x_0 in 0, associeremo a t_2 l'elemento 0 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 1, associeremo a t_2 l'elemento 1 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in -1, associeremo a t_2 l'elemento 1 di $\mathbb{Z}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 2, associeremo a t_2 l'elemento 4 di $\mathbb{Z}$; e così via…

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\quad S := \mathbb{N}, \ \ \mathcal{C} := \{0, 1\}, \ \ \mathcal{F} := \{\mathrm{MCD}, \mathit{mcm}\}.$

Una possibile interpretazione associa 0 a c_0, 1 a c_1, MCD a f e *mcm* a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica x_0. Scegliendo un'assegnazione che porta x_0 in 0, associeremo a t_2 l'elemento 0 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 1, associeremo a t_2 l'elemento 1 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 2, associeremo a t_2 l'elemento 2 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 3, associeremo a t_2 l'elemento 3 di $\mathbb{N}$; e così via…

Un'altra possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1 e poi ancora MCD a f e *mcm* a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica x_0. Scegliendo un'assegnazione che porta x_0 in 0, associeremo a t_2 l'elemento 0 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 1, associeremo a t_2 l'elemento 1 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 2, associeremo a t_2 l'elemento 2 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 3, associeremo a t_2 l'elemento 3 di $\mathbb{N}$; e così via…

Una terza possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1, *mcm* a f e MCD a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica x_0. Scegliendo un'assegnazione che porta x_0 in 0, associeremo a t_2 l'elemento 0 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 1, associeremo a t_2 l'elemento 1 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 2, associeremo a t_2 l'elemento 2 di $\mathbb{N}$; con un'assegnazione che porta x_0 in 3, associeremo a t_2 l'elemento 3 di $\mathbb{N}$; e così via…

$\boxed{\text{Caso 3}}$ $\qquad$ $\mathrm{S} := \mathbb{Z}_8$, $\ \mathcal{C} := \{[2],[5]\}$, $\ \mathcal{F} := \{\, + \,,\, \cdot \,\}$.

Una possibile interpretazione associa [2] a c_0, [5] a c_1, $+$ a f e $\cdot$ a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica $x_0 + (x_0 \cdot [5])$. Scegliendo un’assegnazione che porta x_0 in [0], assoceremo a t_2 l’elemento [0] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [1], assoceremo a t_2 l’elemento [6] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [2], assoceremo a t_2 l’elemento [5] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [3], assoceremo a t_2 l’elemento [4] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [4], assoceremo a t_2 l’elemento [3] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [5], assoceremo a t_2 l’elemento [2] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [6], assoceremo a t_2 l’elemento 1 di $\mathbb{Z}_8$.
Un’altra possibile interpretazione associa [5] a c_0, [2] a c_1, $\cdot$ a f e $+$ a g; sotto tale interpretazione, al termine t_2 abbiamo associato la scrittura simbolica $x_0 \cdot (x_0 + [2])$. Scegliendo un’assegnazione che porta x_0 in [0], assoceremo a t_2 l’elemento [0] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [1], assoceremo a t_2 l’elemento [3] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [2], assoceremo a t_2 l’elemento [1] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [3], assoceremo a t_2 l’elemento [1] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [4], assoceremo a t_2 l’elemento [3] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [5], assoceremo a t_2 l’elemento [0] di $\mathbb{Z}_8$; con un’assegnazione che porta x_0 in [6], assoceremo a t_2 l’elemento [6] di $\mathbb{Z}_8$.

Nella prossima lezione (seconda ora di oggi martedì 7 aprile 2020) arricchiremo il nostro linguaggio per esprimere *enunciati* nella struttura considerata. Poiché (come avevo preannunciato a ottobre) tutto quello che abbiamo fatto nella logica proposizionale ***non si butta via*** ma verrà a un certo punto recuperato, il punto delicato sarà capire come sono fatti (e, soprattutto, come si assegna loro un valore di verità!) gli enunciati atomici (quelli che nella logica proposizionale erano rappresentati dalle variabili proposizionali e qui invece, come vedrete, sono qualcosa di strutturalmente assai più complesso!).