Lemma di Poincaré

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q=0 \\ 0 & q>0 \end{cases}$$

Dimostrazione

si considerino la proiezione

$$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(\underline{x}, t) \longmapsto \underline{x}$$

e la sezione zero

$$s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$
$$\underline{x} \longmapsto (\underline{x}, 0)$$

abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & & \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \\ S \uparrow \;\; \downarrow \pi & & S^* \downarrow \;\; \uparrow \pi^* \\ \mathbb{R}^n & & \Omega^*(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

$\pi \circ S = id \implies S^* \circ \pi^* = id$

su $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$

ma $S \circ \pi \neq id$ dunque

$\pi^* \circ S^* \neq id$

ad esempio

$$\pi^* \circ S^*(f(x,t)) = (f \circ S \circ \pi)(x,t) =$$
$$= f(x,0) \neq f(x,t)$$

Vogliamo dimostrare che,

IN COOMOLOGIA,

$$\pi^* \circ s^* = id$$

ossia, $\forall\ \omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$

ω CHIUSA

$$\boxed{(\pi^* \circ s^*)(\omega) = \omega + q\text{-forma esatta}}$$

a questo scopo definiamo

un operatore K su

$\Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ t.c.

$$id - \pi^* \circ s^* = \pm (d \cdot K \pm K \cdot d)$$

NOTA K decresce il grado

di 1.

$$id - \pi^* \circ s^* = \pm (d \circ k \pm k \circ d)$$

NOTA

$d \circ k \pm k \circ d$ su una forma chiusa restituisce una forma **esatto**

quindi $d \circ k \pm k \circ d$ induce in coomologia la mappa zero.

Un tale k, se esiste, si dice OPERATORE DI OMOTOPIA e $\pi^* \circ s^*$ si dice chain homotopic a id.

per semplicità di notazione definiamo K nel caso $n=1$.

Le forme su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sono combinazioni lineari dei seguenti tipi di forme:

I $\quad f(x,t) \qquad f(x,t)\,dx$

II $\quad f(x,t)\,dx\,dt \qquad f(x,t)\,dt$

Definiamo

$$K : \mathrm{I} \longmapsto 0$$

$$K : \mathrm{II} \longmapsto ?$$

$$f(x,t)\,dt \longmapsto \int_0^t f(x,s)\,ds$$

$$f(x,t)\,dx\,dt \longmapsto \left(\int_0^t f(x,s)\,ds\right)dx$$

verifichiamo che K così definito è un operatore di omotopia:

sulle forme di tipo I:

$$(1-\pi^*\circ s^*)(f(x,t)) =$$

$$f(x,t)-(f\circ s\circ \pi)(x,t) =$$

$$f(x,t)-f(x,0).$$

$$(dK - Kd)(f(x,t)) =$$

$$- K\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial t}dt\Big) =$$

$$= -\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)ds = -\big(f(x,t) - f(x,0)\big)$$

$$(1 - \pi^* \circ s^*)(f(x,t)dx) =$$

$$f(x,t)dx - f(x,0)dx =$$

$$(s \circ \pi)(x,t) = (x,0)$$

$$= \big(f(x,t) - f(x,0)\big)dx$$

$$(dK - Kd)(f(x,t)dx) =$$

$$- K\Big(\frac{\partial f}{\partial t}dt\,dx\Big) = +\Big(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)ds\Big)dx$$

$$= \big(f(x,t) - f(x,0)\big)dx$$

quindi sulle 0-forme I

$$1 - T^* \circ S^* = -(dk - kd)$$

sulle 1-forme I

$$1 - T^* \circ S^* = +(dk - kd)$$

sulle forme di tipo II

$$(1 - T^* \circ S^*)(f(x,t)\,dt) =$$

$$f(x,t)\,dt$$

$$(dk - kd)(f(x,t)\,dt) =$$

$$d\left(\int_0^t f(x,s)\,ds\right) - k\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dt\right) =$$

$$\cancel{\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds\right)dx} + f(x,t)\,dt$$

$$\cancel{-\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds\right)dx}$$

$$(1 - \pi^* \circ s^*)\left(f(x,t)\,dx\,dt\right) =$$

$$f(x,t)\,dx\,dt$$

$$(dk - kd)\left(f(x,t)\,dx\,dt\right) =$$

$$d\left(\left(\int_0^t f(x,s)\,ds\right)dx\right) =$$

$$= f(x,t)\,dt\,dx$$

quindi $1 - \pi^* \circ s^* = +(dk - kd)$

conclusione:

su $\Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$

$$\boxed{1 - \pi^* \circ s^* = (-1)^{q-1}(dk - kd)}$$

consideriamo

$$\begin{tikzcd} H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \arrow[d, shift right, "s^*"'] \\ H^*(\mathbb{R}^n) \arrow[u, shift right, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

si ha $\pi^* \circ s^* = id$

dunque s^* e π^* sono

<u>ISOMORFISMI</u>

Quindi

$$H^*(\mathbb{R}^{n+1}) = H^*(\mathbb{R}^n) = H^*(\mathbb{R}^{n-1}) = \ldots = H^*(\mathbb{R}) = H^*(\text{p.to}).$$

$\blacksquare$